Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
ICM1022 Mecánica Vectorial

AYUDANTIA 9

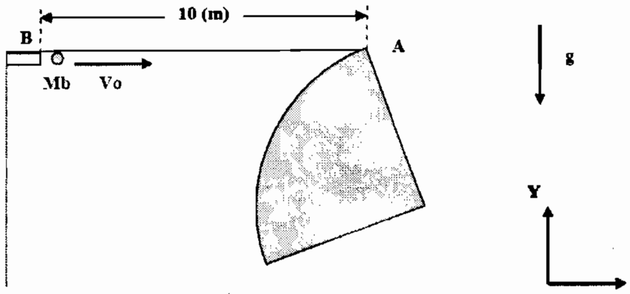
Fabián Cádiz C.
facadiz@ing.puc.cl

1. **Problema 1**
   Una placa de acero ($\rho = 7,85$) gr/cm^3 tiene perfil de cuarto de círculo, con radio $R = 500$(mm) y espesor $T = 5$ (mm). Es rotulada al techo en el punto A (ver figura) e inicialmente yace en reposo. Una pequeña bolita de masa $M_b = 50$ (gr) es disparada con una velocidad inicial horizontal de magnitud $v_0 = 30$ (m/s), a partir de la posición B indicada en la figura. El impacto entre ambos cuerpos está caracterizado por un coeficiente de restitución $e = 0,62$. Se pide calcular la reacción impulsiva entre ambos cuerpos y la reacción impulsiva en A, justo en el isntante de impacto. El movimiento es plano en XY

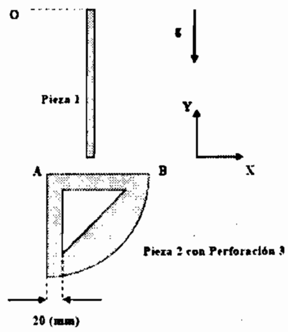
Problema 2
Un péndulo de acero para ensayos mecánicos posee las siguientes características
Masa específica $\rho = 7,85$ (gr/cm^3)
Cilindro 1, de largo $L_1 = 150$ (mm) y diámetro $T = 10$ (mm)
Placa 2 con perfil de cuarto de círculo, de radio $R_2 = 100$ (mm) y espesor $T = 10$ (mm), posee una perforación 3 con forma de triángulo rectángulo isósceles , de cateto $C_3 = 60$ (mm)
El péndulo debe ser rotulado en reposo en el punto O, ubicado en su extremo superior
a) Calcular en qué punto del segmento AB debe soldarse el cilindro para que exista centro de percusión
b) Calcular la ubicación del centro de percusión tras soldar las piezas según el resultado de la parte anterior

Problema 3
Un proyectil de masa m impacta una paleta a una velocidad V_i y la perfora saliendo por el otro lado a una velocidad V_f, a una altura h respecto al punto A. Calcule
a) La reacción impulsiva en el punto A (que sujeta la plancha) producto del impacto y la velocidad angular de la paleta inmediatamente después del golpe
b) La altura a la que debe impactar la bala para minimizar la reacción impulsiva en A

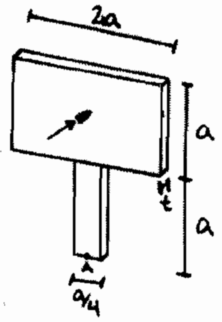
Problema 4
Considere un bloque de acero, que resulta de realizar un sacado de un cuarto de volumen desde un cubo de lado $L = 10$ (cm). Calcular el tensor de inercia de la figura, respecto del vértice O y los ejes absolutos XYZ



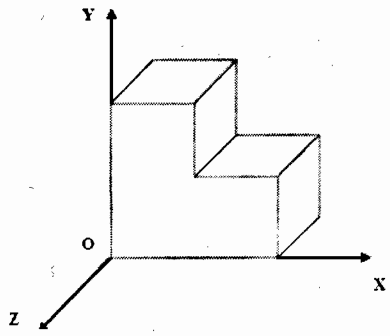
10 (m)
B
A
Mb
Vo
g
Y



O
g
Pieza 1
Y
X
A
B
Pieza 2 con Perforación 3
20 (mm)



2a
a
t
a
a/4



Y
O
X
Z

AYUDANTÍA 9

IMPACTO ENTRE CUERPOS RÍGIDOS EN 2-D

- CONSERVACIÓN MOMENTUM LINEAL

$$\sum \vec{I}_{ext} = \sum \vec{P}_f - \sum \vec{P}_i$$

$$\vec{P} = m\vec{V}_G$$

- CONSERVACIÓN MOMENTUM ANGULAR

$$\sum \vec{r}_{/A} \times \vec{I}_{ext} = \sum \vec{H}_f - \sum \vec{H}_i$$

$$\vec{H}_{/A} = I_{zz/A}\,\vec{\omega}$$

VÁLIDO SI
- A ES UN PUNTO DE ACELERACIÓN NULA
- A COINCIDE CON EL CENTRO DE MASAS

- COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

$$e = \left.\frac{(\vec{V}_{fB} - \vec{V}_{fA}) \cdot \hat{n}}{(\vec{V}_{iA} - \vec{V}_{iB}) \cdot \hat{n}}\right|_{\text{PUNTO DE IMPACTO}}$$

- CENTRO DE PERCUSIÓN

$$h_{CP/O} = \frac{I_{zz/O}}{M\,Y_{G/O}}$$

TENSOR DE INERCIA DE UN C.R.

CON RESPECTO AL PUNTO A Y EJES X-Y-Z

$$
{}^{xyz}\tilde{I}_A = \begin{pmatrix} I_{xx/A} & I_{xy/A} & I_{xz/A} \\ I_{yx/A} & I_{yy/A} & I_{yz/A} \\ I_{zx/A} & I_{zy/A} & I_{zz/A} \end{pmatrix}
$$

DONDE

$$
I_{xx/A} = \int_{CR} dm\,(y^2+z^2) \qquad I_{yy/A} = \int_{CR} dm\,(x^2+z^2)
$$

$$
I_{zz/A} = \int_{CR} dm\,(x^2+y^2)
$$

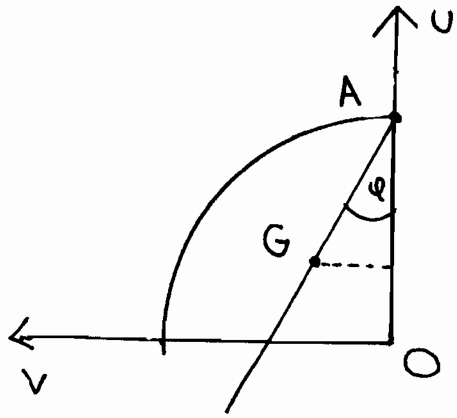
(MOMENTOS DE INERCIA)

Y

$$
\left.\begin{aligned}
I_{xy/A} &= -\int_{CR} dm\,xy = I_{yx/A} \\
I_{yz/A} &= -\int_{CR} dm\,yz = I_{zy/A} \\
I_{xz/A} &= -\int_{CR} dm\,xz = I_{zx/A}
\end{aligned}\right\} \text{PRODUCTOS DE INERCIA}
$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

OBTENGAMOS LAS PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES PARA LA PLACA



$$\left.\begin{array}{l}\rho = 7850\ kg/m^3 \\ R = 0{,}5\ m \\ T = 0{,}005\,m\end{array}\right\}\ m_p = 7{,}7067\ kg$$

$$\overset{UV}{\vec{r}_{G/O}} = \begin{pmatrix} \frac{4\cdot 0{,}5}{3\pi} \\ \frac{4\cdot 0{,}5}{3\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2122 \\ 0{,}2122 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{0{,}2122}{(0{,}5-0{,}2122)}\right) = 36{,}4020^\circ$$

Y $$I_{zz/O} = \frac{1}{2} m_P R^2 = 0{,}9633$$

CON ESTO

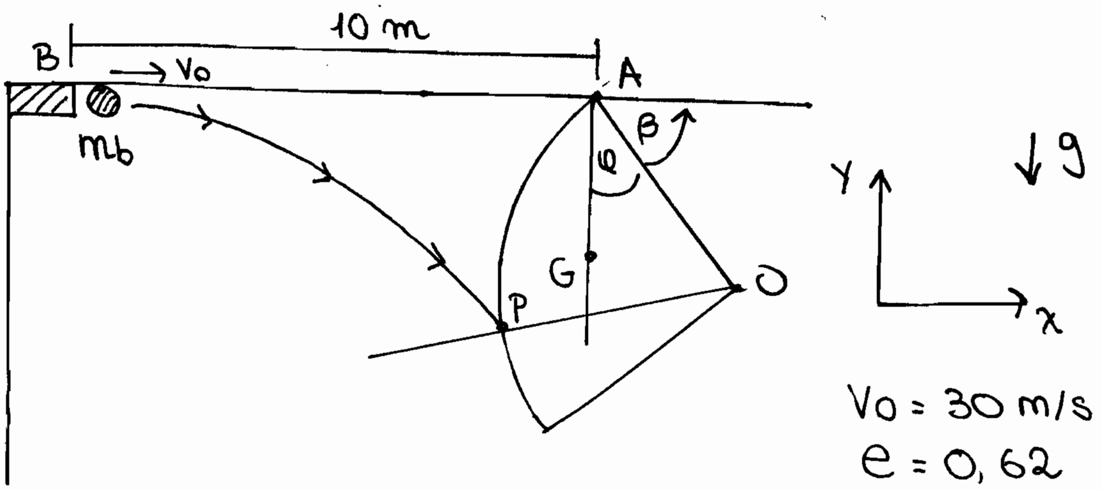
$$I_{zzO} = I_{zzG} + m_p \vec{r}_{OG}^{\,2}$$

$$I_{zzG} = 0{,}9633 - 7{,}7067\,(0{,}2122^2 + 0{,}2122^2)$$
$$= 0{,}2693$$

$$I_{zzA} = I_{zzG} + m_p \vec{r}_{AG}^{\,2}$$

$$\overset{UV}{\vec{r}_{AG}} = \begin{pmatrix} -(0{,}5-0{,}2122) \\ 0{,}2122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2878 \\ 0{,}2122 \end{pmatrix}$$

$$I_{zzA} = 0{,}2693 + 7{,}7067\cdot(0{,}2878^2 + 0{,}2122^2)$$
$$= 1{,}2547$$



$V_0 = 30\ m/s$
$e = 0{,}62$
$g = 9{,}81\ m/s^2$
$m_b = 0{,}05\ kg$

SEA EL ORIGEN B
BUSCAMOS LAS COORDENADAS DEL PUNTO P

$$\vec{r}_P = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

POR CINEMÁTICA

$$\left.\begin{aligned} X &= 30\ t_V \\ Y &= -\tfrac{1}{2} g\, t_V^2 = -4{,}905\, t_V^2 \end{aligned}\right\} Y = -4{,}905\left(\frac{X}{30}\right)^2$$

t_V: TIEMPO DE VUELO

$$Y = -0{,}00545\, X^2$$

ADEMÁS,

$$\vec{r}_O = \begin{pmatrix} 10 + R\cos\beta \\ -R\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 0{,}5\cdot\cos(90^\circ-\varphi) \\ -0{,}5\cdot\sin(90^\circ-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}2967 \\ -0{,}4024 \end{pmatrix}$$

∴ LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN O Y RADIO R ESTÁ DESCRITA POR

$$(x - 10{,}2967)^2 + (y + 0{,}4024)^2 = 0{,}25$$

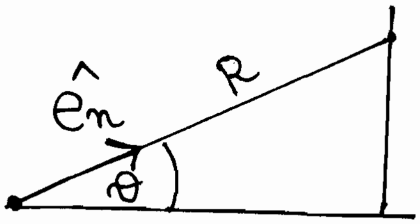
$$(x-10{,}2967)^2+(0{,}4024-0{,}00545x^2)=0{,}25$$

$$x^2-20{,}5934x+106{,}0220+0{,}1619-0{,}004386x^2$$
$$+0{,}00002970x^4=0{,}25$$

$$0{,}00002970x^4+0{,}9956x^2-20{,}5934x+105{,}9339=0$$

$$\rightarrow \quad x=9{,}8104$$
$$y=-0{,}5245$$

LA DIRECCIÓN NORMAL DEL CHOQUE SE OBTIENE ASÍ:



O (10,2967; −0,4024)

P (9,8104; −0,5245)

$$\vartheta=tg^{-1}\left(\frac{-0{,}4024-(-0{,}5245)}{10{,}2967-9{,}8104}\right)$$

$$\vartheta=14{,}0944°$$

$$\therefore \quad \hat{e}_n=\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}9699\\ 0{,}2435\end{pmatrix}$$

LA VELOCIDAD DE LA BOLITA JUSTO ANTES DEL IMPACTO ES

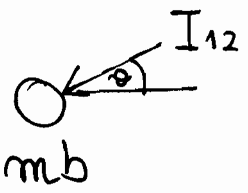
$$V_x=30$$
$$V_y=-gt_v=-9{,}81\cdot\frac{9{,}8104}{30}=-3{,}2080$$

ANÁLISIS DE IMPACTO

t_i = JUSTO ANTES DEL CHOQUE

t_f = JUSTO DESPUÉS DEL CHOQUE

LA LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM LINEAL PARA m_b INDICA

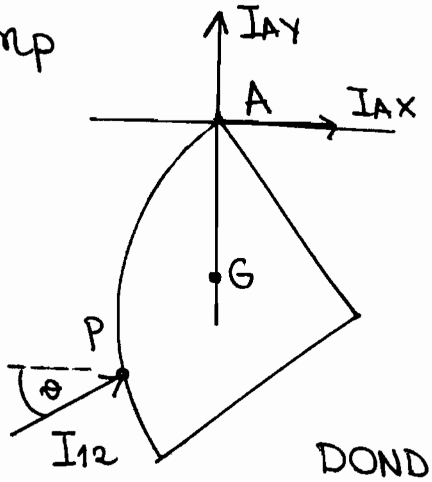


$$\begin{pmatrix} -I_{12}\,0{,}9699 \\ -I_{12}\,0{,}2435 \end{pmatrix} = 0{,}05\begin{pmatrix} V_{bfx} \\ V_{bfy} \end{pmatrix} - 0{,}05\begin{pmatrix} 30 \\ -3{,}2080 \end{pmatrix}$$

$$-0{,}9699\, I_{12} = 0{,}05\, V_{bfx} - 1{,}5 \quad (1)$$

$$-0{,}2435\, I_{12} = 0{,}05\, V_{bfy} + 0{,}1604 \quad (2)$$

PARA m_p



$$\begin{pmatrix} I_{AX} + I_{12}\cdot 0{,}9699 \\ I_{AY} + I_{12}\,0{,}2435 \end{pmatrix} = 7{,}7067\begin{pmatrix} V_{Gfx} \\ V_{Gfy} \end{pmatrix}$$

DONDE

$$\vec{V}_{Gf} = \vec{w} \times \vec{r}\,\big|_{AG} = w_f\,\hat{k} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0{,}2878^2 + 0{,}2122^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{Gf} = \begin{pmatrix} 0{,}3576\, w_f \\ 0 \end{pmatrix}$$

ASÍ

$$I_{AX} + 0{,}9699\, I_{12} = 2{,}7559\, w_f \quad (3)$$

$$I_{AY} + 0{,}2435\, I_{12} = 0 \quad (4)$$

LA LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR PARA m_P (CON RESPECTO A A = CIR)

$$\vec{r}_{AP} \times \vec{I}_{12} = I_{zzA} (\vec{\omega}_f - \vec{0})$$

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 9{,}8104 \\ -0{,}5245 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1896 \\ -0{,}5245 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} -0{,}1896 \\ -0{,}5245 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{12} \cdot 0{,}9699 \\ I_{12} \cdot 0{,}2435 \end{pmatrix} = 1{,}2547\, \omega_f\, \hat{k}$$

$\therefore$

$$0{,}4625\, I_{12} = 1{,}2547\, \omega_f \quad (5)$$

COEF. DE RESTITUCIÓN

$$e = \left. \frac{(\vec{V}_{Pf} - \vec{V}_{bf}) \cdot \hat{e}_n}{(\vec{V}_{bi} - \vec{V}_{Pi}) \cdot \hat{e}_n} \right|_{\text{PTO } P} \qquad e = 0{,}62$$

$$\vec{V}_{Pf} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \omega_f\, \hat{k} \times \begin{pmatrix} -0{,}1896 \\ -0{,}5245 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5245\, \omega_f \\ -0{,}1896\, \omega_f \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_{bf} &= \begin{pmatrix} V_{bfx} \\ V_{bfy} \end{pmatrix} \\ \vec{V}_{bi} &= \begin{pmatrix} 30 \\ -3{,}2080 \end{pmatrix} \\ \vec{V}_{Pi} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \quad 0{,}62 = \frac{\begin{pmatrix} 0{,}5245\, \omega_f - V_{bfx} \\ -0{,}1896\, \omega_f - V_{bfy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9699 \\ 0{,}2435 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 30 - 0 \\ -3{,}2080 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9699 \\ 0{,}2435 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow 0{,}4625\,w_f - 0{,}9699\,V_{bfx} - 0{,}2435\,V_{bfy} = 17{,}5558 \quad (6)$

EL SISTEMA QUEDA

$$-0{,}9699\,I_{12} - 0{,}05 \cdot V_{bfx} = -1{,}5$$
$$-0{,}2435\,I_{12} - 0{,}05\,V_{bfy} = 0{,}1604$$
$$0{,}9699\,I_{12} + I_{Ax} - 2{,}7559\,w_f = 0$$
$$0{,}2435\,I_{12} + I_{Ay} = 0$$
$$0{,}4625\,I_{12} - 1{,}2547\,w_f = 0$$
$$-0{,}9699\,V_{bfx} - 0{,}2435\,V_{bfy} + 0{,}4625\,w_f = 17{,}5558$$

RESOLVIENDO

$I_{12} = 2{,}2742$ (NS)

$V_{bfx} = -14{,}1149$ m/s

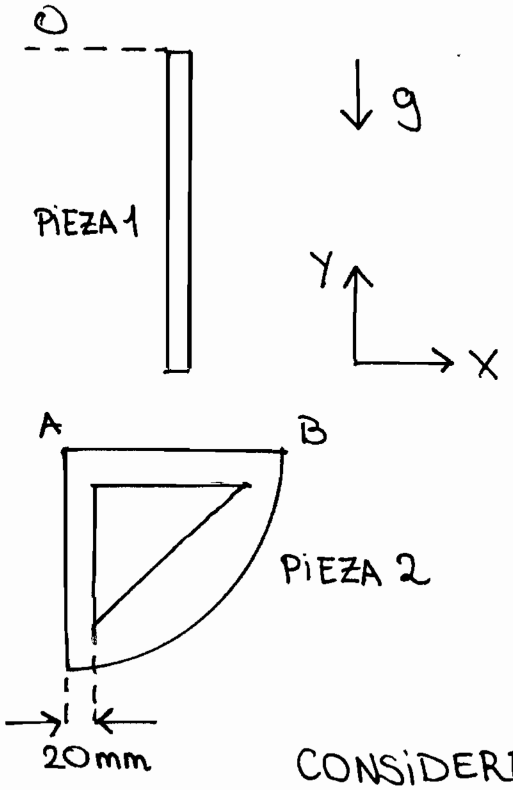
$V_{bfy} = -14{,}2834$ m/s

$I_{Ax} = 0{,}1045$ (NS)

$I_{Ay} = -0{,}5538$ (NS)

$w_f = 0{,}8383$ rad/s

SOLUCIÓN PROBLEMA 2



MASA ESPECÍFICA $\rho = 7{,}85\ gr/cm^3$

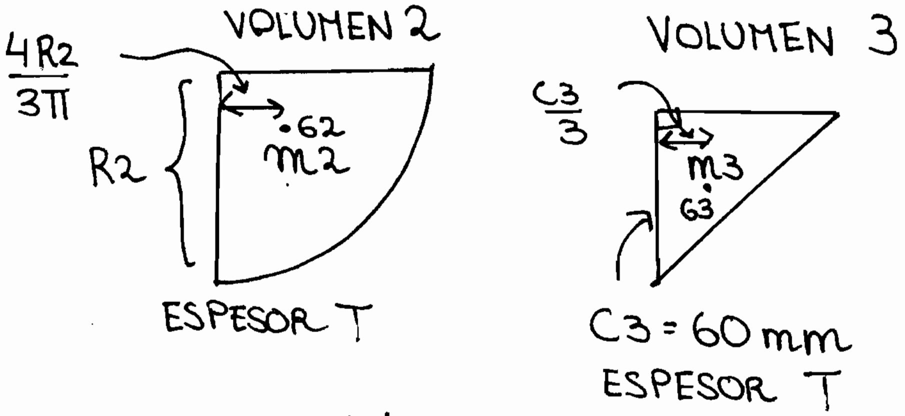
CILINDRO 1, LARGO $L_1 = 150$ mm

Y DIÁMETRO $T_1 = 10$ mm

PLACA 2 CON PERFIL DE CUARTO DE CÍRCULO, RADIO $R_2 = 100$ mm Y ESPESOR $T = 10$ mm

PERFORACIÓN SIMÉTRICA CON FORMA DE TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES, DE CATETO $C_3 = 60$ mm

CONSIDEREMOS



CON ESTO, LA POSICIÓN HORIZONTAL DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LA PIEZA 2 CON RESPECTO AL PUNTO A ES

$$X_{G23/A} = \frac{m_2 X_{G2} - m_3 X_{G3}}{m_2 - m_3}$$

VOLUMEN 2: $\frac{\pi R_2^2}{4} \cdot T = 7{,}8539 \cdot 10^{-5}\ m^3 \rightarrow m_2 = 0{,}61654$ kg

VOLUMEN 3: $\frac{1}{2} C_3^2 \cdot T = 0{,}000018\ m^3 \rightarrow m_3 = 0{,}1413$ kg

$$\therefore\ X_{G23/A} = \frac{0{,}6165\cdot\dfrac{4\cdot 0{,}1}{3\pi} - 0{,}1413\cdot(0{,}2+0{,}2)}{0{,}6165-0{,}1413}$$

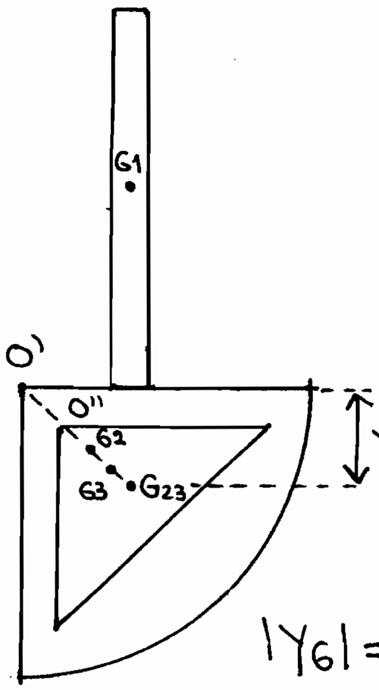
$$= 0{,}04317\ (m)$$

LUEGO, EXISTE CENTRO DE PERCUSIÓN SI LA UNIÓN PIEZA 1 - PIEZA 2 PERMANECE VERTICAL

$\Rightarrow$ CENTROS DE GRAVEDAD ALINEADOS

SE DEBE SOLDAR A 0,04317 m DE A

b)



$$|h_{cp}| = \frac{I_{zz/O}}{m|Y_G|}$$

$$m = m_{PIEZA 1} + m_{PIEZA 2}$$

$$= 0{,}09248 + 0{,}4752 = 0{,}5677\ kg$$

$$Y_{G23/AB} = 0{,}04317\ \text{(POR SIMETRÍA)}$$

$$|Y_G| = \frac{0{,}09248\cdot 0{,}075 + 0{,}4752(0{,}04317+0{,}15)}{0{,}5677}$$

$$|Y_G| = 0{,}1739$$

AHORA, EL MOMENTO DE INERCIA DEL CONJUNTO c/r A O ES

$$I_{zz/O} = I_{1/O} + I_{2/O} - I_{3/O}$$

$$I_{1/0} = I_{1/G1} + m_1 \vec{r}_{OG1}^{\,2}$$

$$I_{1/G1} = \frac{m_1}{12}\left(L_1^2 + 3r_1^2\right) = 0{,}0001740$$

$$r_1 = \frac{T_1}{2}$$

$$\|\vec{r}_{OG1}\| = 0{,}075$$

$$I_{1/0} = 0{,}0006942$$

$$I_{2/0} = I_{2/G2} + m_2 \vec{r}_{OG2}^{\,2}$$

$$I_{2/0'} = I_{2/G2} + m_2 \vec{r}_{O'G2}^{\,2}$$

$$I_{2/0'} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = 0{,}003083$$

$$\|\vec{r}_{O'G2}\| = \sqrt{\left(\frac{4\cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4\cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2}$$

$$I_{2/G2} = 0{,}0008615$$

$$\|\vec{r}_{OG2}\| = \sqrt{\left(0{,}04317 - \frac{4\cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2 + \left(0{,}15 + \frac{4\cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2}$$

$$I_{2/0} = 0{,}02369$$

$$I_{3/0} = I_{3/G3} + m_3 \vec{r}_{OG3}^{\,2}$$

$$I_{3/0''} = I_{3/G3} + m_3 \vec{r}_{O''G3}^{\,2}$$

$$I_{3/0''} = \frac{1}{3} m_3 C_3^2 = 0{,}0001696$$

$$I_{3/0} = 0{,}005159$$

$$\|\vec{r}_{O''G3}\| = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}02^2}$$

$$\|\vec{r}_{OG3}\| = \sqrt{\left(0{,}04317 - (0{,}02 + 0{,}02)\right)^2 + (0{,}15 + 0{,}02 + 0{,}02)^2}$$

CON ESTO, $I_{zz/O} = 0{,}01923$

Y LA DISTANCIA VERTICAL C/R A O DEL CENTRO DE PERCUSIÓN ES

$$|h_{CP}| = 0{,}1948 \ (m)$$

OTRA FORMA PARA CALCULAR $I_{zz/O}$

$$I_{zz/O} = I_{1/O} + I_{23/O}$$

$$I_{1/O} = 0{,}0006942$$

$$I_{23/O} = I_{23/G23} + m_{23} \vec{r}_{OG3}^{\,2}$$

$$I_{23/G23} = I_{2/G23} - I_{3/G23}$$

$$I_{2/G23} = I_{2/G2} + m_2 \vec{r}_{G23G2}^{\,2}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{2/O'} = I_{2/G2} + m_2 \vec{r}_{O'G2}^{\,2} \\ I_{2/O'} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = 0{,}003083 \\ \|\vec{r}_{O'G2}\| = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2} \end{array}\right\} I_{2/G2} = 0{,}0008615$$

$$\|\vec{r}_{G23G2}\| = \sqrt{\left(0{,}04317 - \frac{4 \cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2 + \left(0{,}04317 - \frac{4 \cdot 0{,}1}{3\pi}\right)^2}$$

$$\therefore I_{2/G23} = 0{,}0008622$$

$$I_{3/G23} = I_{3/G3} + m_3 \, \vec{r}_{G23G3}^{\,2}$$

$$I_{3/O''} = I_{3/G3} + m_3 \, \vec{r}_{O''G3}^{\,2}$$

$$I_{3/O''} = \frac{1}{3} m_3 \, c_3^2 = 0{,}0001696$$

$$\|\vec{r}_{O''G3}\| = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}02^2}$$

$$I_{3/G3} = 0{,}00005656$$

$$\|\vec{r}_{G23G3}\| = \sqrt{(0{,}04317 - (0{,}02 + 0{,}02))^2 + (0{,}04317 - (0{,}02 + 0{,}02))^2}$$

$$I_{3/G23} = 0{,}00005940$$

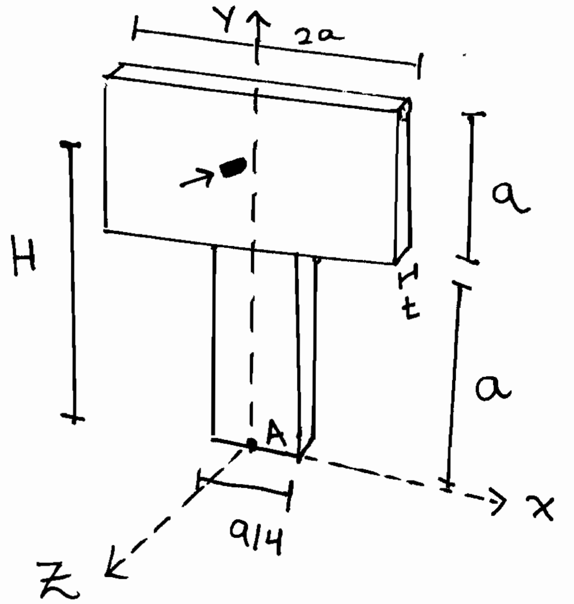
$$I_{23/G23} = 0{,}0008028$$

$$\|\vec{r}_{OG23}\| = 0{,}15 + 0{,}04317$$

FINALMENTE

$$I_{zz/O} = 0{,}01922$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 3



SE DEFINEN LOS INSTANTES

t_i = JUSTO ANTES DEL IMPACTO

t_f = JUSTO DESPUÉS DEL IMPACTO

LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL PARA LA BALA :

$$I_{PB}\,\hat{k} = mV_f(-k) - m v_i(-k)$$

$$I_{PB} = m(V_i - V_f) \quad (1)$$

$\uparrow$
IMPULSO
ENTRE BALA
Y PALETA

LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM LINEAL PARA LA PALETA ES:

$$-I_{PB}(\hat{k}) + I_{AZ}(\hat{k}) = m_P \cdot V_G\,(\hat{k})$$

$\downarrow$
IMPULSO
EN LA RÓTULA

Y $m_P = m_1 + m_2 = \underbrace{\rho \cdot 2a \cdot a \cdot t}_{m_1} + \underbrace{\rho a \cdot \frac{a}{4} t}_{m_2}$

$$= \frac{9a^2 t \rho}{4}$$

$$\therefore \quad I_{Az} = \frac{9a^2 t \rho}{4} V_G + I_{PB} \quad (2)$$

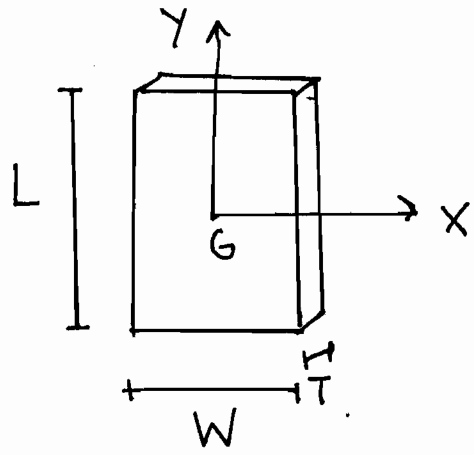
LA LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR CON RESPECTO A A (DE ACELERACIÓN NULA)

$$h\hat{j}\,x - I_{PB}\,\hat{k} = I_{xx/A}\, w_f \,(\hat{i})$$

$$-h\, I_{PB} = I_{xx/A}\, w_f \quad (3)$$

CON $\quad I_{xx/A} = I_{xx\,1/A} + I_{xx\,2/A}$

PARA UNA PLACA RECTANGULAR DE LARGO L, ANCHO W Y ESPESOR T,



$$I_{xx/G} = \frac{1}{12} M (L^2 + T^2)$$

LUEGO,

$$I_{xx\,①/A} = \frac{1}{12} m_1 (a^2+t^2) + m_1 \left(\frac{3a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\rho a^2 t \,(t^2 + 28a^2)}{6}$$

$$I_{xx\,②/A} = \frac{1}{12} m_2 (a^2+t^2) + m_2 \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\rho a^2 t \,(t^2 + 4a^2)}{48}$$

ASÍ,

$$I_{xx/A} = \frac{\rho a^2 t \,(3t^2 + 76a^2)}{16}$$

ADEMÁS,

$$\vec{V}_{fG} = \cancel{\vec{V}_A}^{\,\vec{0}} + w_f (\hat{\imath}) \times \vec{r}_{AG}$$

$$V_G (\hat{k}) = w_f (\hat{\imath}) \times Y_{G/A} (\hat{\jmath})$$

$$V_G = w_f \, Y_{G/A} \quad (4)$$

DONDE

$$Y_{G/A} = \frac{m_1 \frac{3a}{2} + m_2 \frac{a}{2}}{m_1 + m_2} = \frac{25}{18} a$$

FINALMENTE,

(4) EN (2) : $I_{Az} = I_{PB} + m_P\, \omega_f\, Y_{G/A}$

(3) EN (5) : $I_{Az} = I_{PB} - \dfrac{m_P\, h\, I_{PB}\, Y_{G/A}}{I_{xx/A}}$

$$= \left(1 - \frac{m_P\, h\, Y_{G/A}}{I_{xx/A}}\right) I_{PB}$$

DE (1), SE OBTIENE PARA EL IMPULSO EN LA RÓTULA

$$\boxed{I_{Az} = \left(1 - \frac{m_P\, h\, Y_{G/A}}{I_{xx/A}}\right) m\,(V_i - V_f)}$$

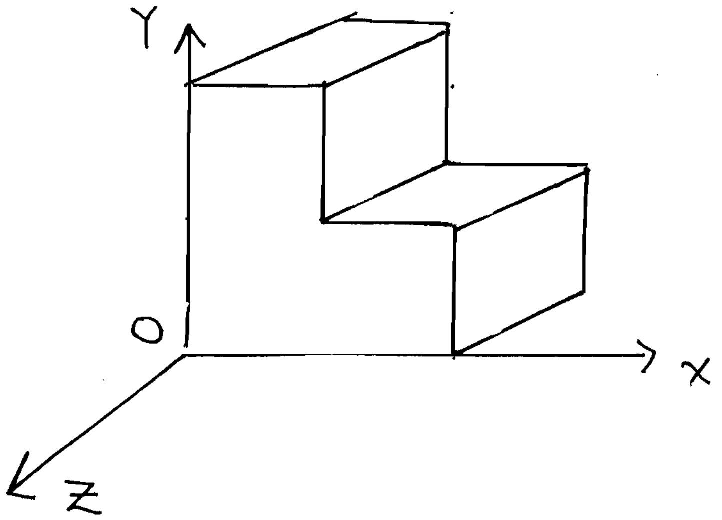
Y DE (3) y (1) $\qquad \omega_f = \dfrac{-h\, m\,(V_i - V_f)}{I_{xx/A}}$

b) BASTA CON IMPONER

$I_{Az} = 0 \rightarrow h_{CP/A} = \dfrac{I_{xx/A}}{m_P\, Y_{G/A}}$ CENTRO DE PERCUSIÓN

$$h_{CP/A} = \frac{3t^2 + 76a^2}{50a}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 4



$L = 10\ cm$

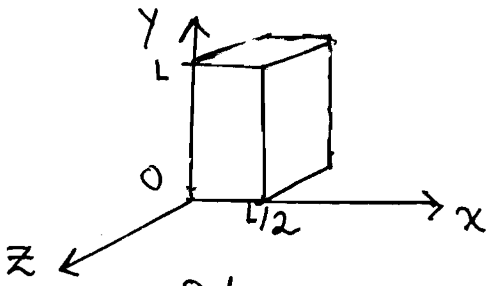
$\rho = \rho_{ACERO} = 7850\ kg/m^3$

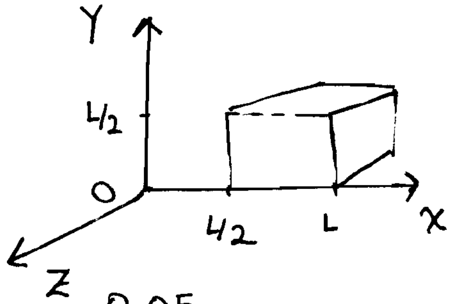
OBTENGAMOS LOS MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA POR DEFINICIÓN

$$I_{xx/O} = \int_0^{0{,}05} dx \int_0^{0{,}1} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz\, \rho\,(y^2+z^2) + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \int_0^{0{,}05} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz\, \rho\,(y^2+z^2)$$

REPRESENTA INTEGRAL SOBRE EL VOLUMEN V_1

INTEGRAL SOBRE V_2:





$$I_{xx/O} = \rho \cdot 0{,}05 \int_0^{0{,}1} dy \left(y^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-0{,}1}^{0} + \rho\, 0.5 \int_0^{0{,}05} dy \left(y^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-0{,}1}^{0}$$

$$= \rho 0{,}05 \left\{ \int_0^{0{,}1} dy \left(0{,}1 y^2 + \frac{0{,}001}{3}\right) + \int_0^{0{,}05} dy \left(0{,}1 y^2 + \frac{0{,}001}{3}\right) \right\}$$

$$= 0{,}05 \rho \left\{ \frac{0{,}1}{3} y^3 \Big|_0^{0{,}1} + \frac{0{,}001 y}{3} \Big|_0^{0{,}1} + \frac{0{,}1}{3} y^3 \Big|_0^{0{,}05} + \frac{0{,}001}{3} y \Big|_0^{0{,}05} \right\}$$

$$I_{xx/0} = 0{,}05\rho \left\{ \frac{0{,}1 \cdot 0{,}1^3}{3} + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}001}{3} + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05^3}{3} + \frac{0{,}001}{3} 0{,}05 \right\}$$

$$= 4{,}375 \cdot 10^{-6} \cdot 7850 = 0{,}03434$$

$$I_{yy/0} = \int_0^{0{,}05} dx \int_0^{0{,}1} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz\, \rho (z^2 + x^2) + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \int_0^{0{,}05} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz\, \rho (z^2 + x^2)$$

$$= \rho 0{,}1 \int_0^{0{,}05} dx \left(\frac{z^3}{3} + x^2 z \right) \Big|_{-0{,}1}^{0} + \rho 0{,}05 \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \left(\frac{z^3}{3} + x^2 z \right) \Big|_{-0{,}1}^{0}$$

$$= 0{,}1 \rho \int_0^{0{,}05} dx \left(\frac{0{,}001}{3} + 0{,}1 x^2 \right) + 0{,}05 \rho \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \left(\frac{0{,}001}{3} + 0{,}1 x^2 \right)$$

$$= 0{,}1 \rho \left\{ \frac{0{,}001}{3} x \Big|_0^{0{,}05} + \frac{0{,}1}{3} x^3 \Big|_0^{0{,}05} \right\} + 0{,}05 \rho \left\{ \frac{0{,}001}{3} x \Big|_{0{,}05}^{0{,}1} + \frac{0{,}1}{3} x^3 \Big|_{0{,}05}^{0{,}1} \right\}$$

$$= 0{,}1 \rho \left\{ \frac{0{,}001 \cdot 0{,}05}{3} + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05^3}{3} \right\} + 0{,}05 \rho \left\{ \frac{0{,}001}{3} \cdot 0{,}05 + \frac{0{,}1^4}{3} - \frac{0{,}1}{3} 0{,}05^3 \right\}$$

$$I_{yy/0} = 0{,}03434$$

$$I_{zz/0} = \int_0^{0{,}05} dx \int_0^{0{,}1} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz\, \rho (x^2 + y^2) + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \int_0^{0{,}05} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz\, \rho (x^2 + y^2)$$

$$I_{zz/O} = 0{,}1\rho\left\{\int_0^{0{,}05} dx \int_0^{0{,}1} dy \; (x^2+y^2) + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \int_0^{0{,}05} dy \; (x^2+y^2)\right\}$$

$$= 0{,}1\rho\left\{\int_0^{0{,}05} dx \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{0{,}1} + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{0{,}05}\right\}$$

$$= 0{,}1\rho\left\{\int_0^{0{,}05} dx \left(0{,}1x^2 + \frac{0{,}1^3}{3}\right) + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \left(0{,}05x^2 + \frac{0{,}05^3}{3}\right)\right\}$$

$$= 0{,}1\rho\left\{\frac{0{,}1}{3}x^3\Big|_0^{0{,}05} + \frac{0{,}1^3}{3}x\Big|_0^{0{,}05} + \frac{0{,}05}{3}x^3\Big|_{0{,}05}^{0{,}1} + \frac{0{,}05^3}{3}x\Big|_{0{,}05}^{0{,}1}\right\}$$

$$= 0{,}1\rho\left\{\frac{0{,}1}{3}0{,}05^3 + \frac{0{,}1^3}{3}0{,}05 + \frac{0{,}05}{3}\cdot 0{,}000875 + \frac{0{,}05^3}{3}\cdot 0{,}05\right\}$$

$$= 0{,}02944$$

AHORA, LOS PRODUCTOS DE INERCIA:

$$I_{xy/O} = -\int_0^{0{,}05} dx \int_0^{0{,}1} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz \; \rho x y - \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \int_0^{0{,}05} dy \int_{-0{,}1}^{0} dz \; \rho x y$$

$$= -0{,}1\rho\left\{\int_0^{0{,}05} dx \int_0^{0{,}1} dy \; xy + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \int_0^{0{,}05} dy \; xy\right\}$$

$$= -0{,}1\rho\left\{\int_0^{0{,}05} dx \; x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{0{,}1} + \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \; x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{0{,}05}\right\}$$

$$= -0{,}1\rho\left\{\int_0^{0,05} dx\; x\,\frac{0{,}1^2}{2} + \int_{0,05}^{0,1} dx \cdot x\,\frac{0{,}05^2}{2}\right\}$$

$$= -0{,}1\rho\left\{\frac{0{,}1^2}{2}\,\frac{x}{2}\Big|_0^{0,05} + \frac{0{,}05^2}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,05}^{0,1}\right\}$$

$$= -0{,}008586 = I_{xy/0} = I_{yx/0}$$

$$I_{yz/0} = -\int_0^{0,05} dx \int_0^{0,1} dy \int_{-0,1}^{0} dz\, \rho y z - \int_{0,05}^{0,1} dx \int_0^{0,05} dy \int_{-0,1}^{0} dz\, \rho y z$$

$$= -0{,}05\rho\left\{\int_0^{0,1} dy \int_{-0,1}^{0} dz\, yz + \int_0^{0,05} dy \int_{-0,1}^{0} dz\, yz\right\}$$

$$= -0{,}05\rho\left\{\int_0^{0,1} dy\; y\,\frac{z^2}{2}\Big|_{-0,1}^{0} + \int_0^{0,05} dy\; y\,\frac{z^2}{2}\Big|_{-0,1}^{0}\right\}$$

$$= +0{,}05\rho\,\frac{0{,}1^2}{2}\left\{\int_0^{0,1} dy\; y + \int_0^{0,05} dy\; y\right\}$$

$$= 0{,}05\rho\,\frac{0{,}1^2}{2}\cdot\left\{\frac{y^2}{2}\Big|_0^{0,1} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{0,05}\right\} = 0{,}01227$$

$$I_{xz/0} = -\int_0^{0,05} dx \int_0^{0,1} dy \int_{-0,1}^{0} dz\, \rho x z - \int_{0,05}^{0,1} dx \int_0^{0,05} dy \int_{-0,1}^{0} dz\, \rho x z$$

$$I_{xz/O} = -0{,}1\rho \int_0^{0{,}05} dx \int_{-0{,}1}^{0} dz\, xz - 0{,}05\rho \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx \int_{-0{,}1}^{0} dz\, xz$$

$$= -0{,}1\rho \int_0^{0{,}05} dx\, x\, \frac{z^2}{2}\Big|_{-0{,}1}^{0} - 0{,}05\rho \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx\, x\, \frac{z^2}{2}\Big|_{-0{,}1}^{0}$$

$$= \frac{0{,}1^3}{2}\rho \int_0^{0{,}05} dx\, x + \frac{0{,}05 \cdot 0{,}1^2}{2}\rho \int_{0{,}05}^{0{,}1} dx\, x$$

$$= \frac{0{,}1^3}{2} \cdot \frac{0{,}05^2}{2}\rho + \frac{0{,}05 \cdot 0{,}1^2}{2} \cdot \frac{(0{,}1^2 - 0{,}05^2)}{2}\rho$$

$$= 0{,}01227$$

CON ESTO, EL TENSOR DE INERCIA CON RESPECTO AL PUNTO O Y EJES XYZ

$$\underset{\sim}{I}_O^{xyz} = \begin{pmatrix} 0{,}03434 & -0{,}008586 & 0{,}01227 \\ -0{,}008586 & 0{,}03434 & 0{,}01227 \\ 0{,}01227 & 0{,}01227 & 0{,}02944 \end{pmatrix}$$