Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
ICM1022 Mecánica Vectorial

AYUDANTIA 7

Fabián Cádiz C.
facadiz@ing.puc.cl

1. **Problema 1**
La figura muestra el modelo plano simplificado de un automóvil subiendo una rampa inclinada en un ángulo $\vartheta = 30$. El vehículo es traccionado por un motor eléctrico, cuyo rotor aplica un torque T_r sobre la rueda trasera. Por principio de acción y reacción, el estator del motor produce un torque $T_r = T_e$ en sentido opuesto sobre la plataforma, modelada como un cuerpo homogéneo y que está rotulada a las ruedas en sus extremos A y B. Asumir rodadura pura entre las ruedas y la superficie de la rampa y que en los puntos de contacto con la rampa no hay reacciones de momento. Otros datos en la solución
a) Calcular el valor de T_r y las normales sobre las ruedas para acelerar en dirección de la rampa, con $A = 1$ (m/s^2)
b) Justo cuando el vehículo sube con velocidad $V = 1$ (m/s) se apaga el motor. Calcular cuánta distancia adicional sobre la rampa recorrerá el automóvil hasta detenerse

Problema 2
Calcular el torque T necesario que se debe aplicar en el punto O para producir el mivimiendo indicado en la figura para el instante de interés (datos en la solución). El pasador P desliza sin roce a través de la ranura AB, formada por una barra (Largo L, ancho d) perforada simétricamente con espesor c

Problema 3
La polea de la figura consiste en un disco no homogéneo ($m_1 = 10kg$, $R = 1m$), y su radio de giro con respecto a O es $r = 0{,}5$ (cm). A un extremo de la cuerda se le aplica una fuerza vertical constante de 50 N (hacia abajo), mientras que el otro extremo se encuentra unido a una barra delgada ($m_2 = 5$ kg, L=1 m) ligada a un resorte tensorial de constante $K_t = 10$ N/m. Si el sistema parte del reposo con $\vartheta = 0$, y el ángulo de equilibrio para el resorte es $\vartheta = -\pi/12$ rad, calcular las aceleraciones angulares de la polea y la barra, para $t = 0^+$. Asuma que en este rango de ϑ, el extremo derecho de la cuerda permanece vertical

Problema 4
Los dos bloques de la figura, de masa $m_1 = 10$ (kg), $m_2 = 5$ (kg), penden, en un plano vertical, de una barra de masa despreciable pivoteada en A, que está horizontal en la posición de equilibrio del resorte de rigidez $K = 2000$ (N/m) y largo natural $l_0 = 10$ (cm). Los elementos que unen a los bloques con la barra en P y Q pueden modelarse

como varillas delgadas sin masa e inextensibles. Si en el punto B se aplica una perturbación periódica $F(t) = 20\sin(wt)$, y considerando $C = 30$ (Ns/m), determine para pequeñas oscilaciones la ecuación diferencial que rige el movimiento del bloque m_2

Problema 5

Una placa con forma de cuarto de círculo de radio $R = 1$ (m) posee una perforación con forma de triángulo recángulo isósceles de cateto $C = 60$ (m). Esta pieza compuesta tiene masa $M = 10$ (kg), está articulada en A a una barra AB sin masa y en O (punto fijo) a una superficie horizontal . La barra mide $L = 3$ (m). El extremo B de la barra sólo puede deslizar sobre el suelo con rapidez constante $V = 20$ (cm/s).

a) Calcular la reacción que existe en la rótula O , justo en el instante en que OA esté vertical

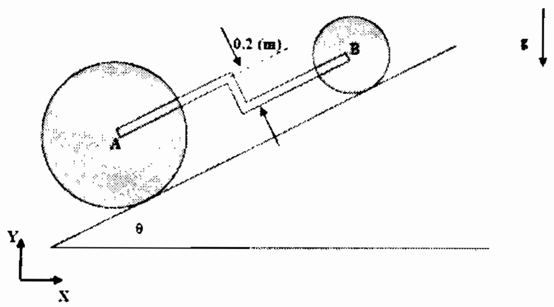
b) Suponga ahora que la placa perforada no está en contacto con ninguna barra. Si se libera la placa desde el reposo, con OA formando un ángulo $\pi/6$ respecto al eje x, calcular la velocidad angular justo antes de impactar con el suelo

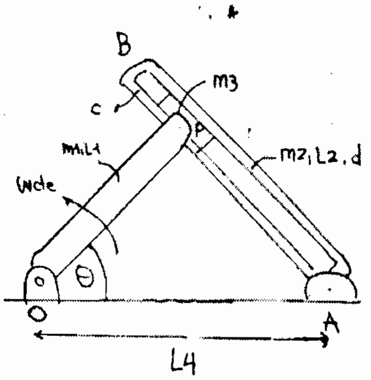
Problema 6

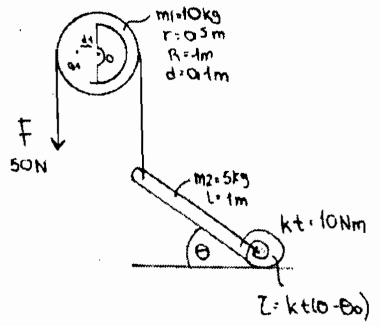
El sistema de la figura consiste en un disco uniforme de masa M y radio R y una barra uniforme de masa m y largo $2l$, unida por un pasador al centro O del disco. En la unión de la barra al disco existe un resorte rotacional de rigidez K (Nm/rad). Suponiendo que el disco rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, y que ambos elementos se mantienen en un plano vertical único en todo instante, determine

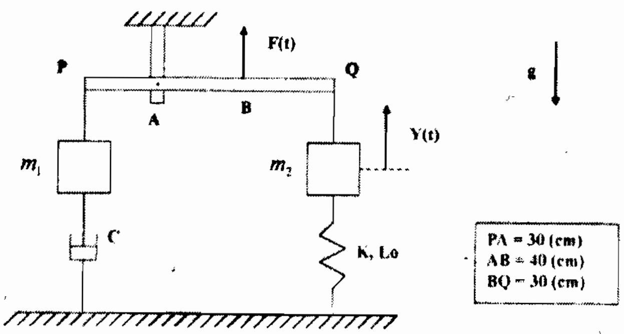
a) Las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema

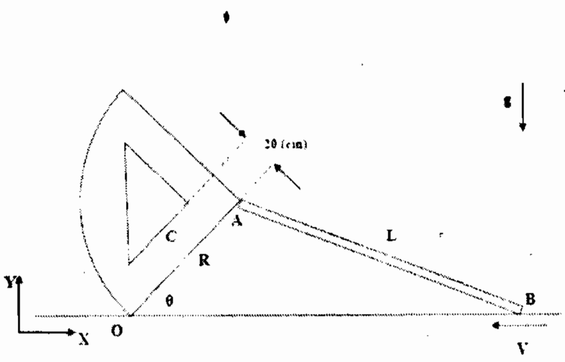
b) La energía total del sistema

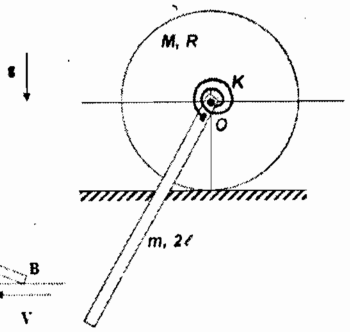









20 (cm)
A
C
R
L
B
θ
Y
X
O
V


g
M, R
K
O
m, 2ℓ

DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN 2-D

SEGUNDA LEY DE NEWTON

$$\sum \vec{F}_{EXT,CR} = m\,\vec{a}_G$$

ANÁLISIS DE MOMENTOS

$$\sum \vec{M}_{EXT\,CR/G} = I_{ZZ/G}\,\vec{\alpha}_{CR}$$

DONDE $I_{ZZ/G}$ ES EL MOMENTO DE INERCIA DEL CR C/R A G Y AL EJE Z

LO INTERESANTE ES QUE EL ANÁLISIS DE MOMENTOS ES VÁLIDO TAMBIÉN CUANDO SE HACE RESPECTO A OTRO PUNTO DEL CR (DIGAMOS, "O") DE ACELERACIÓN NULA

$$\sum \vec{M}_{EXT\,CR/O} = I_{ZZ/O}\,\vec{\alpha}_{CR}$$

DONDE $I_{ZZ/O}$ SE PUEDE OBTENER A PARTIR DE $I_{ZZ/G}$ USANDO EL TEOREMA DE STEINER 2-D

$$I_{ZZ/O} = I_{ZZ/G} + m\,\vec{r}_{G/O}^{\,2}$$

NOTAR QUE SI $O \neq G$,

$$I_{ZZ/O} > I_{ZZ/G}$$

RADIO DE GIRO

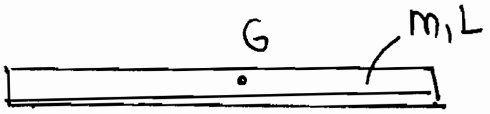
EL RADIO DE GIRO ES UNA PROPIEDAD GEOMÉTRICA DE UN C.R, TAL QUE

$$I_{zz/B} = m r^2$$ CON B: PUNTO ESPECÍFICO
m: MASA DEL CR

SE PUEDE INTERPRETAR COMO

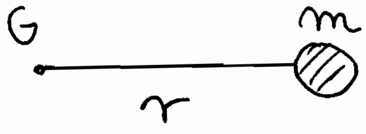
r = DISTANCIA RESPECTO DE B, A LA CUAL UNA PARTÍCULA PONTUAL DE MASA m POSEE EL MISMO MOMENTO DE INERCIA QUE EL CR DE REFERENCIA

<u>EJEMPLO</u>: BARRA DELGADA (m, L)

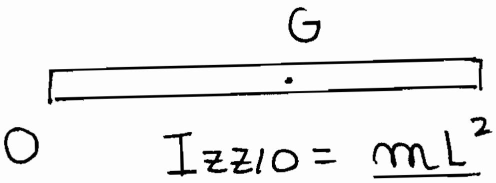


$$I_{zz/G} = \frac{1}{12} m L^2$$

$\approx$

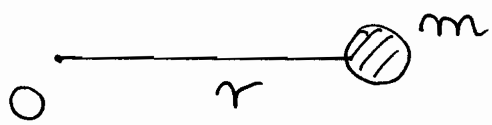


$$\frac{1}{12} m L^2 = m r^2 \longrightarrow r = L\sqrt{3}/6$$



$$I_{zz/O} = \frac{m L^2}{3}$$

$\approx$



$$r = L\sqrt{3}/3$$

MOMENTO DE INERCIA EQUIVALENTE

CUANDO DOS O MÁS C.R'S SE MUEVEN SOLIDARIAMENTE, ES POSIBLE APLICAR DOS CONCEPTOS PARA OBTENER EL MOMENTO DE INERCIA DEL CUERPO COMPLETO RESPECTO DE UN PUNTO EN PARTICULAR

1. LAS PROPIEDADES DE INERCIA SON ADITIVAS/SUSTRACTIVAS
2. TEOREMA DE TRASLACIÓN DE STEINER

ENERGÍA CINÉTICA DE UN CR-2D

$$K_{CR} = \underbrace{\frac{1}{2} m \vec{V}_G^{\,2}}_{\text{E. CINÉTICA DE TRASLACIÓN}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{zz/G} \vec{\omega}_{CR}^{\,2}}_{\text{E. CINÉTICA DE ROTACIÓN}}$$

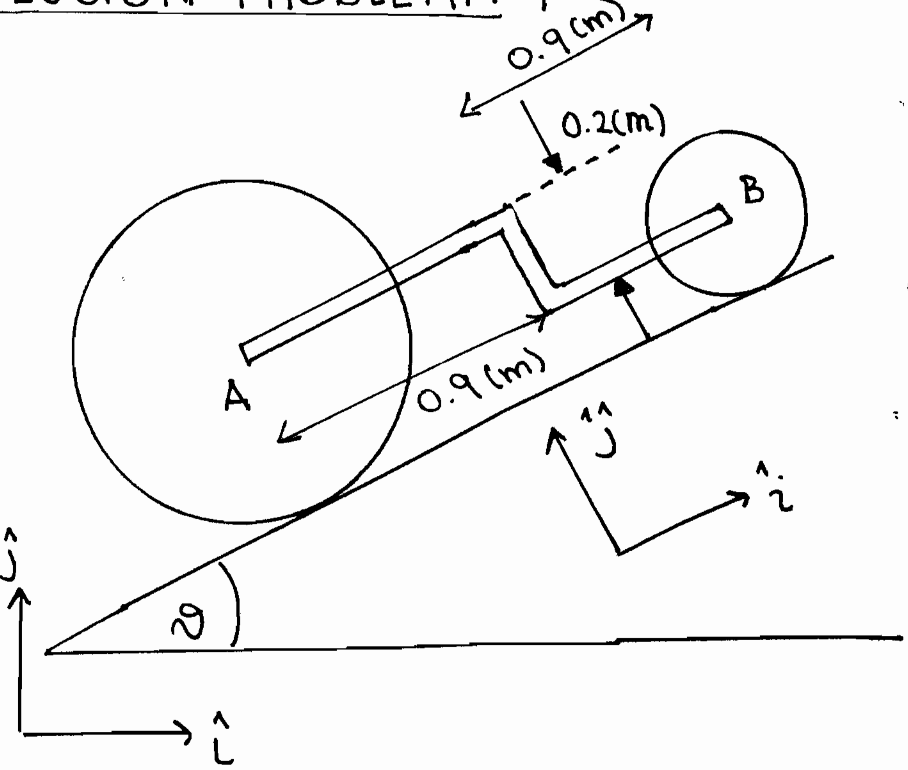
EN PARTICULAR, SI O ES UN PUNTO DEL CR CON VELOCIDAD NULA

$$K_{CR} = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^{\,2} + \frac{1}{2} I_{zz/G} \vec{\omega}_{CR}^{\,2} = \frac{1}{2} I_{zz/O} \vec{\omega}_{CR}^{\,2}$$

↓

SÓLO ENERGÍA DE ROTACIÓN

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

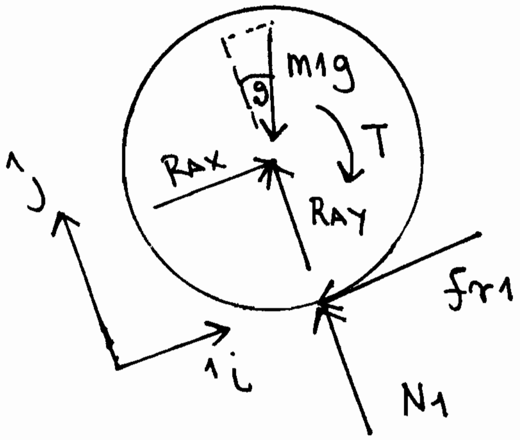


$m_1 = 4\ kg$
$R_1 = 0{,}4\ m$
$m_p = 6\ kg$
$m_2 = 2\ kg$
$R_2 = 0{,}2\ m$
$\vartheta = \pi/6\ rad$
$a = 1\ m/s^2$

EN LA DIRECCIÓN DEL PLANO INCLINADO

$\vec{a} = a\,\hat{i}$

EL DIAGRAMA DE FUERZAS Y MOMENTOS PARA m_1 ES



T ES LA MAGNITUD DEL TORQUE APLICADO A LA RUEDA m_1.

$$T = T_r = T_e$$

LA SEGUNDA LEY DE NEWTON DA

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a}_{G_1}$$

SEGÚN $\hat{i}$:

$$R_{AX} - fr_1 - m_1 g \sin\vartheta = m_1 a$$

EN $\hat{j}$:

$$R_{AY} + N_1 - m_1 g \cos\vartheta = 0$$

EVALUANDO

$$R_{AX} - fr_1 = 23{,}62 \quad (1)$$

$$R_{AY} + N_1 = 33{,}9828 \quad (2)$$

ADEMÁS, $\sum \vec{M}_{EXT/G1} = I_{ZZ/G1} \cdot \vec{\alpha}_{CR1}$

$$-T\hat{k} + (-R_1\hat{j} \times -fr\,\hat{i}) = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \alpha_1 \hat{k}$$

POR RODADURA PURA, SE TIENE

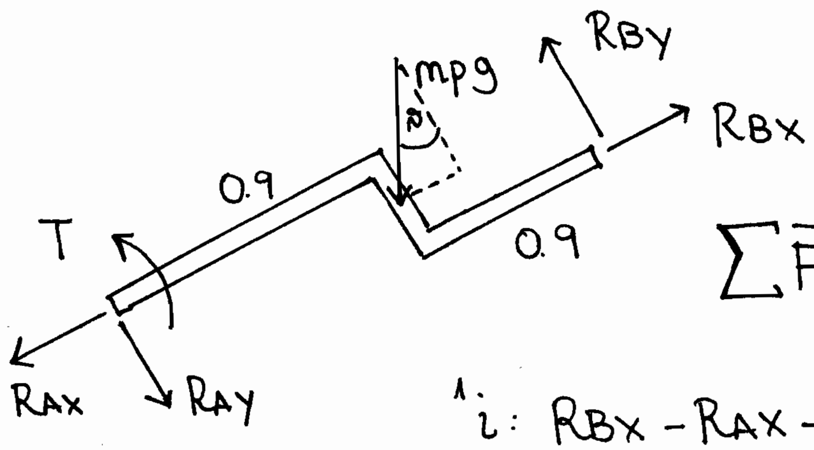
$$\alpha_1 R_1 = -a$$ (YA QUE SI $\alpha_1 > 0$, m_1 BAJA POR EL PLANO)

$\therefore$

$$-T - fr_1 R_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \alpha_1$$

$$-T - 0{,}4\, fr_1 = -0{,}8 \quad (3)$$

PARA LA PLATAFORMA, SE TIENE



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{GP}$$

$\hat{i}$: $R_{BX} - R_{AX} - m_p g \sin\theta = m_p a$

$\hat{j}$: $R_{BY} - R_{AY} - m_p g \cos\theta = 0$

EVALUANDO,

$$R_{BX} - R_{AX} = 35{,}43 \quad (4)$$

$$R_{BY} - R_{AY} = 50{,}9743 \quad (5)$$

PARA LA SUMA DE MOMENTOS SE TIENE

$$\sum \vec{M}_{EXT/GP} = I_{ZZ/GP} \cdot \vec{\alpha}_{CR}$$

$$\sum \vec{M}_{EXT/GP} = (-0.9\hat{i} + 0.1\hat{j}) \times (-R_{AX}\hat{i} - R_{AY}\hat{j})$$

$$+ (0.9\hat{i} - 0.1\hat{j}) \times (R_{BX}\hat{i} + R_{BY}\hat{j}) + T\hat{k}$$

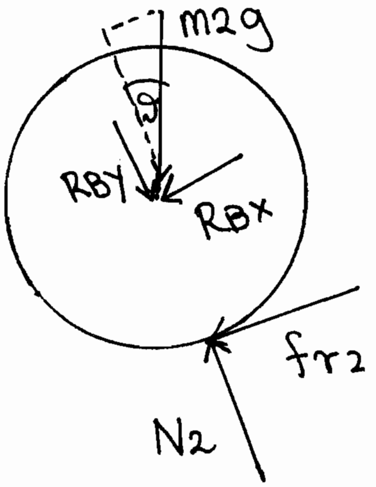
$$= (0.9 R_{AY} + 0.1 R_{AX} + 0.9 R_{BY} + 0.1 R_{BX} + T)\,\hat{k}$$

Y $\vec{\alpha}_{CR} = 0$

$\therefore$

$$0.9 R_{AY} + 0.9 R_{BY} + 0.1 R_{AX} + 0.1 R_{BX} = 0 \quad (6)$$

PARA LA MASA m_2



$$\sum \vec{F}_{EXT} = m_2 \vec{a}_{G2}$$

$\hat{i}$: $-R_{BX} - f_{r2} - m_2 g \sin\theta = m_2 a$

$\hat{j}$: $-R_{BY} + N_2 - m_2 g \cos\theta = 0$

EVALUANDO

$\therefore$ $-R_{BX} - f_{r2} = 11{,}81 \quad (7)$

$-R_{BY} + N_2 = 16{,}9914 \quad (8)$

ADEMÁS,

$$\sum \vec{M}_{EXT/G2} = I_{zz/G2}\, \overrightarrow{\alpha_{CR2}}$$

$$\sum \vec{M}_{EXT/G2} = (-R\hat{j} \times (-fr_2\hat{i} + N_2\hat{j}))$$

$$= -fr_2 R_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \alpha_2$$

DONDE, POR RODADURA PURA,

$$\alpha_2 R_2 = -a$$

$$\therefore \quad fr_2 = 1 \quad (9)$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA

$R_{AX} = -48,24$ (N)
$R_{AY} = -38,5088$ (N)

$R_{BX} = -12,81$ (N)

$R_{BY} = 12,4655$ (N)

$fr_1 = -71,86$ (N)

$N_1 = 72,4916$ (N)

$N_2 = 29,4569$ (N)

$T = 29,5440$ (Nm)

b) DEFINIMOS LOS INSTANTES

T_i = CUANDO SE APAGA EL MOTOR CON $\vec{V} = 1\, m/s\ \hat{i}$

T_f = EL VEHÍCULO SE DETIENE

LUEGO, LA ENERGÍA MECÁNICA EN T_i ES

$$E_i = U_i + K_i$$

$$U_i = CTE$$

$$K_i = K_1 + K_2 + K_P$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \vec{V_1}^2 + \frac{1}{2} I_{zz/G_1} \vec{\omega_1}^2$$

DONDE, SI $\vec{\omega_1} = \omega_1 \hat{k}$, POR RODADURA PURA

$$\omega_1 R_1 = -V$$

$\therefore$

$$K_1 = 0.5 \cdot 4 \cdot 1^2 + 0.5(0.5 \cdot 4 \cdot 0.4^2)(-1/0.4)^2 = 3\ J$$

OTRA FORMA $\rightarrow$ $K_1 = \frac{1}{2} I_{zz/CIR_1} \vec{\omega_1}^2$

DONDE EL CIR DE 1 ES EL PUNTO DE CONTACTO CON EL PLANO, $\therefore$

$$I_{zz/CIR_1} = I_{zz/G_1} + m_1 \vec{r_{CIR\,G_1}}^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2}(0.5 \cdot 4 \cdot 0.4^2 + 4 \cdot 0{,}4^2)(-1/0.4)^2 = 3\ J$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \vec{V_2}^2 + \frac{1}{2} I_{zz/G_2} \vec{\omega_2}^2$$

$$= 0.5 \cdot 2 \cdot 1^2 + 0.5\,(0.5 \cdot 2 \cdot 0.2^2)\,(-1/0.2)^2 = 1.5 \text{ J}$$

RODADURA PURA

TAMBIÉN SE PUEDE OBTENER COMO

$$K_2 = \frac{1}{2} I_{zz/CIR_2} \vec{\omega_2}^2$$

$$K_P = \frac{1}{2} m_P \vec{V_P}^2 = 0.5 \cdot 6 \cdot 1^2 = 3$$

SI x ES LA DISTANCIA QUE SUBE EL VEHÍCULO SOBRE EL PLANO INCLINADO A PARTIR DE T_i (Y HASTA T_f), ENTONCES

$$E_f = U_f + K_f$$

$$U_f = \text{CTE} + (m_1 + m_2 + m_P)\, g \cdot x \sin\theta$$

$$= \text{CTE} + 58{,}86\, X$$

$$K_f = 0$$

AHORA, POR EL TEOREMA DEL TRABAJO-ENERGÍA

$$W_{nc} = \int_{T_i}^{T_f} d\vec{r} \cdot \vec{F}_{nc} = E_f - E_i$$

DONDE: $\vec{F}_{nc}$ ES LA SUMA DE FUERZAS NO CONSERVATIVAS

DONDE

$$\vec{f}_{roce} = \vec{f}_{r1} + \vec{f}_{r2} = \vec{F}_{nc}$$

PERO

$W_{nc} = 0$, PUES EN RODADURA PURA EL PUNTO DE APLICACIÓN DE $\vec{f}_r$ (PARA $\vec{f}_{r1}$ Y $\vec{f}_{r2}$) TIENE $\vec{V}$ NULA

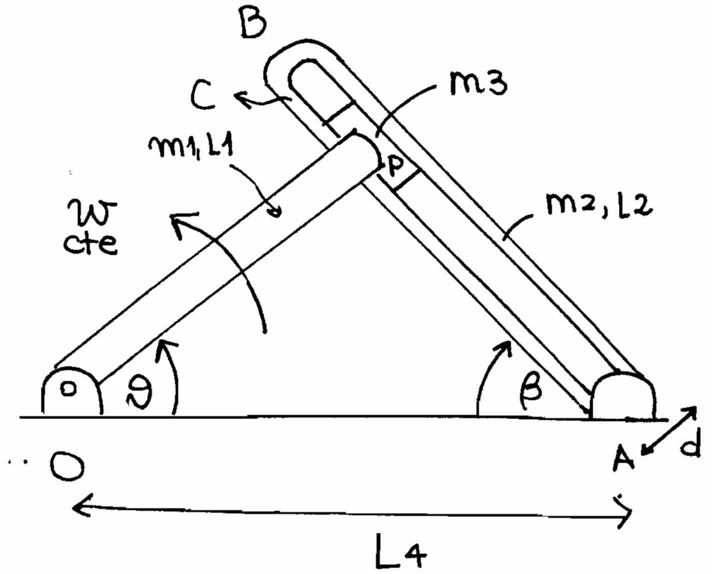
LUEGO, SE CONSERVA LA ENERGÍA MECÁNICA

$$CTE + 7{,}5 = CTE + 58{,}86\, X$$

$\therefore$

RECORRE $X = 0{,}1274\ (m)$ HASTA DETENERSE

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

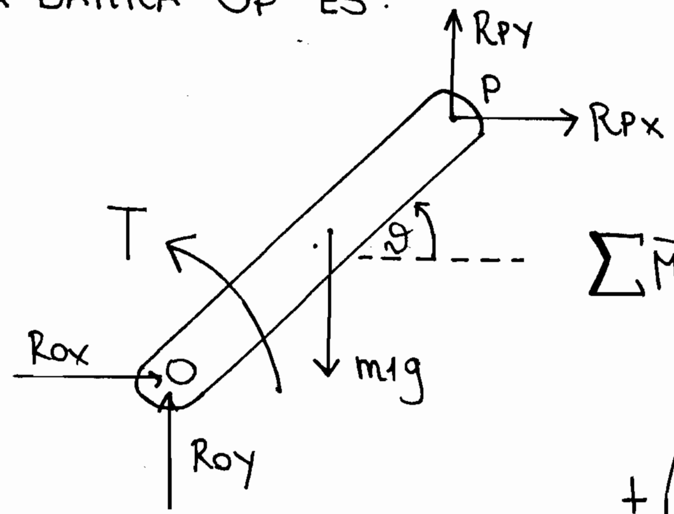


$m_1 = 5\ kg$ $\quad L_1 = 1\ m$ $\quad m_2 = 5\ kg$ $\quad L_2 = 1{,}5\ m$ $\quad d = 5\ cm$

$w = 1\ rad/s$ $\quad L_4 = 1{,}5\ m$ $\quad m_3 = 1\ kg$ $\quad C = 0{,}1\ cm$

$$\vartheta \overset{(ii)}{=} \pi/6\ rad$$

EL DIAGRAMA DE FUERZAS Y MOMENTOS PARA LA BARRA OP ES:



$$\sum \vec{M}_{/O} = I_{1/O}\, \cancel{\vec{\alpha}}^{\,0}$$

$$\sum \vec{M}_{/O} = T\hat{k} + \begin{pmatrix} \frac{L_1}{2}\cos\vartheta \\ \frac{L_1}{2}\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1\cos\vartheta \\ L_1\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{Px} \\ R_{Py} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

EVALUANDO

$$T + 0.866\, R_{Py} - 0.5\, R_{Px} = 21.239 \quad (1)$$

$$\sum \vec{F} = m_1 \vec{a}_{G1}$$

$$\hat{i}: \quad R_{Ox} + R_{Px} = m_1 a_{G1x}$$

$$\hat{j}: \quad R_{Oy} - m_1 g + R_{Py} = m_1 a_{G1y}$$

POR OTRO LADO, LA ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASA DE LA BARRA SE PUEDE OBTENER COMO

$$\vec{a}_{G1} = \cancel{\vec{a}_0}^{\,0} + \cancel{\vec{\alpha}}^{\,0} \times \vec{r}_{G1/0} + \vec{\omega}_{OP} \times (\vec{\omega}_{OP} \times \vec{r}_{G1/0})$$

$$\vec{a}_{G1} = \omega \hat{k} \times \left(\omega \hat{k} \times \left(\frac{L1}{2}\cos\vartheta\, \hat{\imath} + \frac{L1}{2}\sin\vartheta\, \hat{\jmath}\right)\right)$$

$$\vec{a}_{G1} = \omega \hat{k} \times \left(\omega \frac{L1}{2}\cos\vartheta\, \hat{\jmath} - \omega \frac{L1}{2}\sin\vartheta\, \hat{\imath}\right)$$

$$\vec{a}_{G1} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \frac{L1}{2}\cos\vartheta \\ -\omega^2 \frac{L1}{2}\sin\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{G1x} \\ a_{G2x} \end{pmatrix}$$

LUEGO, LA 2ª LEY DE NEWTON QUEDA

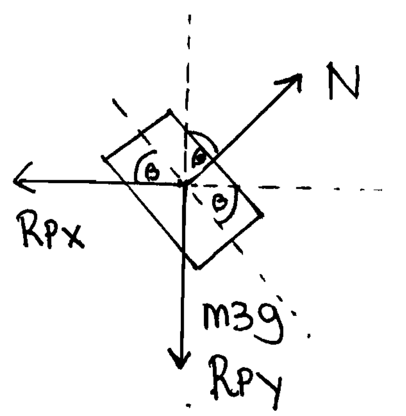
$$R_{ox} + R_{Px} = -m1\,\omega^2 \frac{L1}{2}\cos\vartheta$$

$$R_{oy} - m1g + R_{Py} = -m1 \frac{L1}{2}\omega^2 \sin\vartheta$$

EVALUANDO,

$$R_{ox} + R_{Px} = -2{,}165 \quad (2)$$
$$R_{oy} + R_{Py} = 47{,}8 \quad (3)$$

EL ANÁLISIS DE FUERZA PARA EL PASADOR P

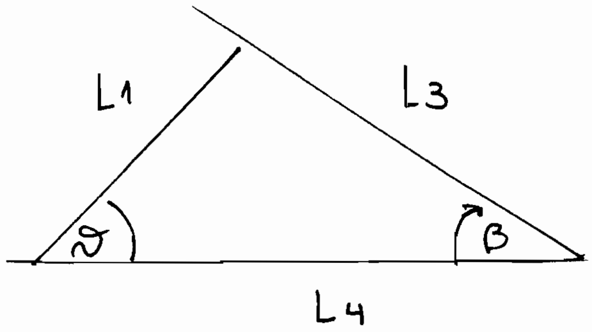


$$\sum \vec{F} = m3\, \vec{a}_P$$

$$\hat{\imath}: -R_{Px} + N\sin\beta = m3\, a_{Px}$$

$$\hat{\jmath}: -R_{Py} - m3g + N\cos\beta = m3\, a_{Py}$$

ES POSIBLE DETERMINAR β EN EL INSTANTE DE INTERÉS



POR EL TEOREMA DEL COSENO

$$L_3^2 = L_1^2 + L_4^2 - 2L_1L_4\cos\vartheta$$

EN EL INSTANTE DE INTERÉS

$$L_3 = 0.807 \text{ m}$$

ADEMÁS, POR EL TEOREMA DEL SENO

$$\frac{L_1}{\sin\beta} = \frac{L_3}{\sin\vartheta}$$

$$\therefore \sin\beta = \frac{L_1}{L_3}\sin\vartheta \overset{(ii)}{=} 0.61957$$

$$\therefore \beta \overset{(ii)}{=} 0.6682 \text{ rad}$$

LA ACELERACIÓN DEL PASADOR SE OBTIENE COMO:

$$\vec{a}_P = \cancel{\vec{a}_O}^{\,0} + \underbrace{\cancel{\vec{\alpha}_{OP}}}_{0} \times \vec{r}_{P/O} + \vec{\omega}_{OP} \times (\vec{\omega}_{OP} \times \vec{r}_{P/O})$$

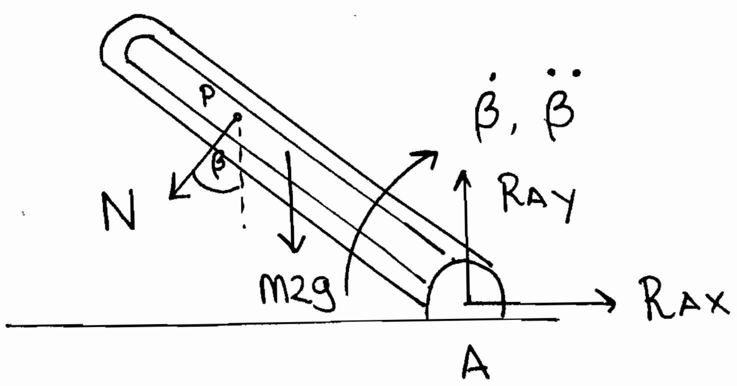
SE OBTIENE
$$\vec{a}_P = \begin{pmatrix} -\omega^2 L_1\cos\vartheta \\ -\omega^2 L_1 \sin\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \end{pmatrix}$$

CON ESTO LAS ECUACIONES DE FUERZA QUEDAN

$$-R_{Px} + N\sin\beta = -\omega^2 m_3 L_1\cos\vartheta$$
$$-R_{Py} - m_3 g + N\cos\beta = -\omega^2 m_3 L_1 \sin\vartheta$$

EVALUANDO
$$-R_{Px} + 0.61957\,N = -0.866 \quad (4)$$
$$-R_{Py} + 0.7849\,N = 9.31 \quad (5)$$

PARA LA BARRA AC,



$$\sum \vec{M}_{/A} = I_{zz/A}\,\alpha\hat{k}$$
$$= I_{zz/A}\,(-\ddot{\beta})\hat{k}$$

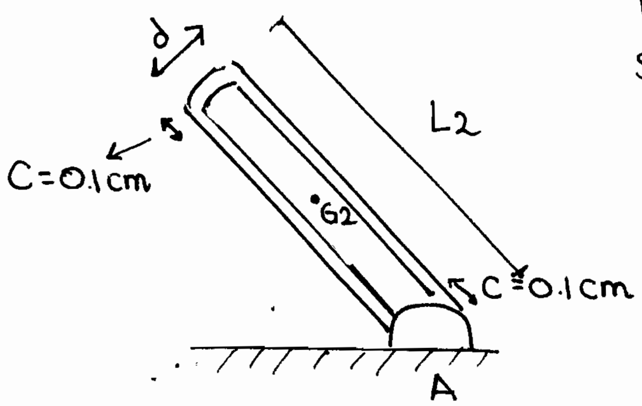
$$\sum \vec{M}_{/A} = \begin{pmatrix} -\frac{L2}{2}\cos\beta \\ \frac{L2}{2}\sin\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m2g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L3\cos\beta \\ L3\sin\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -N\sin\beta \\ -N\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{L2}{2} m2g\cos\beta + L3\,N\sin^2\beta + L3\,N\cos^2\beta\right)\hat{k}$$

EVALUANDO, $\sum \vec{M}_{/A} = (28.876 + 0.807\ N)\,\hat{k}$

DEBEMOS OBTENER EL MOMENTO DE INERCIA DE LA BARRA C/R A A.

PRIMERO OBTENEMOS $I_{zz/G2}$, CONSIDERANDO UNA BARRA DE LARGO L2, ANCHO d, A LA CUAL SE LE "SUSTRAE" UNA BARRA DE LARGO (L2 - 2c) Y ANCHO d-2c.



NECESITAMOS LA DENSIDAD SUPERFICIAL DE LA BARRA

MASA TOTAL : $m2 = 5\,kg$

ÁREA : $L2\,d - (d-2c)(L2-2c)$

$$= 1.5\cdot 0.05 - 0.03\,(1.5 - 0.002)$$
$$= 0.03\ m^2$$

LUEGO

$$\sigma = \frac{m_2}{A} = \frac{5\ kg}{0.03\ m^2} = 166.666\ kg/m^2$$

ASÍ, EL MOMENTO DE INERCIA DE LA BARRA "RELLENA" SERÁ

$$I_{a/G2} = \frac{1}{12} m_a (L_2^2 + d^2)$$

$$m_a = L_2 \cdot d \cdot \sigma = 12{,}49\ kg$$

$$\therefore I_{a/G2} = 2.346\ kg\,m^2$$

Y EL DE LA BARRA QUE SE "EXTRAE"

$$I_{b/G2} = \frac{1}{12} m_b \left((d-2c)^2 + (L_2 - 2c)^2 \right)$$

$$m_b = (d-2c)(L_2 - 2c)\,\sigma$$

$$m_b = 7.4899\ kg$$

$$I_{b/G2} = 1.4011\ kg\,m^2$$

FINALMENTE,

$$I_{zz/G2} = I_{a/G2} - I_{b/G2} = 0.9448\ kgm^2$$

PARA OBTENER EL MOMENTO DE INERCIA C/R A A, USAMOS EL TEOREMA DE TRASLACIÓN DE STEINER

$$I_{zz/A} = I_{zz/G2} + m \left(L_2/2 \right)^2 = 3.757\ kgm^2$$

CON ESTO, LA EC. DE MOMENTOS C/R A A QUEDA

$$28.876 + 0.807\, N = 3.757\,(-\ddot{\beta})$$

PARA DETERMINAR $\ddot{\beta}$ EN EL INSTANTE DE INTERÉS, USAMOS

$$\sin\beta = \frac{L1}{L3}\sin\vartheta \quad / \; \frac{d}{dt}$$

$$\cos\beta\,\dot{\beta} = \frac{L1}{L3}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} \longrightarrow \dot{\beta} \overset{ii}{=} 1.3671 \text{ rad/s}$$

DERIVANDO NUEVAMENTE,

$$-\sin\beta\,\dot{\beta}^2 + \cos\beta\,\ddot{\beta} = -\frac{L1}{L3}\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{L1}{L3}\cancel{\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta}} \; 0$$

$\therefore$ ii)

$$-1.15796 + 0.7849\,\ddot{\beta} = -0.61957$$

$$\ddot{\beta} = 0.6859 \text{ rad/s}^2$$

ASÍ

$$28.876 + 0.807\, N = -2.5769 \quad (6)$$

LA 2ª LEY DE NEWTON PARA LA BARRA

$$\sum \vec{F}_{EXT} = m\vec{a}_{G2}$$

$$i: \; R_{AX} - N\sin\beta = m_2\, a_{G2x}$$

$$j: \; R_{AY} - m_2 g - N\cos\beta = m_2\, a_{G2y}$$

Y LA ACELERACIÓN DEL CM DE LA BARRA ES:

$$\vec{a}_{G2} = \cancel{\vec{a}_A}^{\,0} + (-\ddot{\beta}\,\hat{k}) \times \vec{r}_{G2/A} + (-\dot{\beta})\hat{k} \times (-\dot{\beta}\hat{k} \times \vec{r}_{G2/A})$$

$$= -\ddot{\beta}\,\hat{k} \times \begin{pmatrix} -\frac{L_2}{2}\cos\beta \\ \frac{L_2}{2}\sin\beta \end{pmatrix} + -\dot{\beta}\,\hat{k} \times \left(-\dot{\beta}\,\hat{k} \times \begin{pmatrix} -\frac{L_2}{2}\cos\beta \\ \frac{L_2}{2}\sin\beta \end{pmatrix}\right)$$

$$= \ddot{\beta}\,\frac{L_2}{2}\cos\beta\,\hat{j} + \ddot{\beta}\,\frac{L_2}{2}\sin\beta\,\hat{i} + \dot{\beta}^2\frac{L_2}{2}\cos\beta\,\hat{i} - \dot{\beta}^2\frac{L_2}{2}\sin\beta\,\hat{j}$$

EVALUANDO EN EL INSTANTE DE INTERÉS,

$$\vec{a}_{G2} = \begin{pmatrix} 1.4189 \\ -0.46467 \end{pmatrix} m/s^2 = \begin{pmatrix} a_{G2x} \\ a_{G2y} \end{pmatrix}$$

REEMPLAZANDO Y EVALUANDO,

$$R_{Ax} - 0.61957\ N = 7.0945 \quad (7)$$
$$R_{Ay} - 0.7849\ N = 46.7266 \quad (8)$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA:

$T = 44.152\ Nm$

$R_{Px} = -23.28\ N$

$R_{Py} = -39.9\ N$

$R_{Ox} = 21.116\ N$

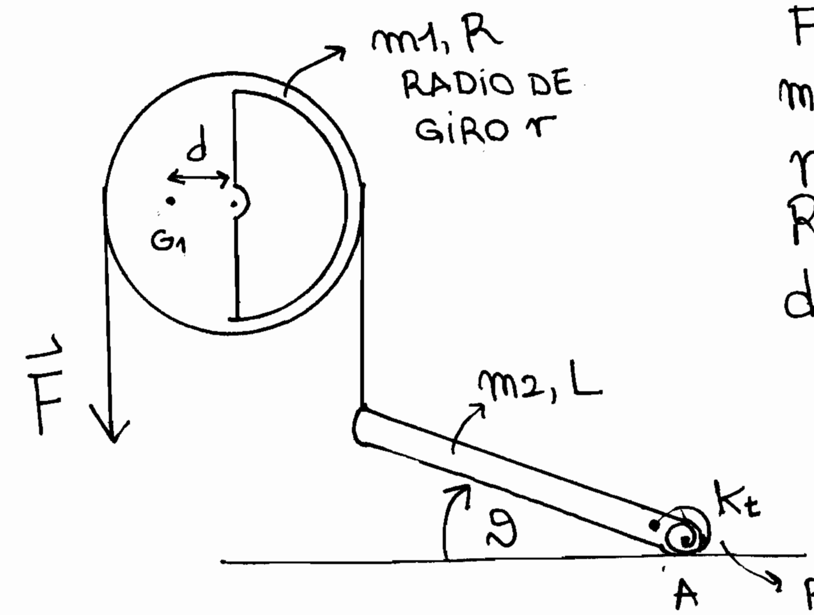
$R_{Oy} = 87.7\ N$

$N = -38.975\ N$

$R_{Ax} = -17.05\ N$

$R_{Ay} = 16.135\ N$

SOLUCIÓN PROBLEMA 3



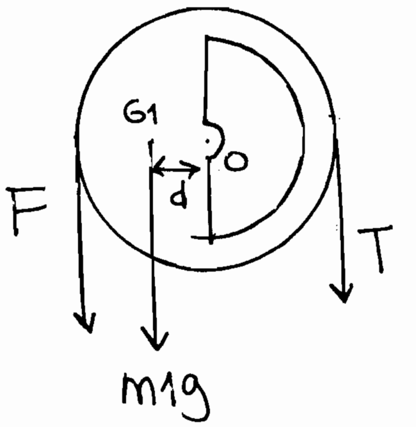
$F = 50\ N$
$m_1 = 10\ kg$
$r = 0{,}5\ m$
$R = 1\ m$
$d = 0.1\ m$

$m_2 = 5\,kg$
$L = 1\ m$
$K_t = 10\ N/rad$
$\vartheta_0 = -\pi/12$

RESORTE TORSIONAL

$$\vec{T}_K = K_t(\vartheta - \vartheta_0)\,\hat{k}$$

PARA LA POLEA, SE TIENE



$$\sum \vec{M}_{/O} = I_{zz1/O}\,\vec{\alpha}_1$$

O ES UN PUNTO DE ACELERACIÓN NULA

$$\sum \vec{M}_{/O} = -d\hat{i} \times -m_1 g\hat{j} + -R\hat{i} \times -F\hat{j} + R\hat{i} \times -T\hat{j}$$

$$= (d m_1 g + RF - RT)\,\hat{k}$$

AHORA, COMO r ES EL RADIO DE GIRO

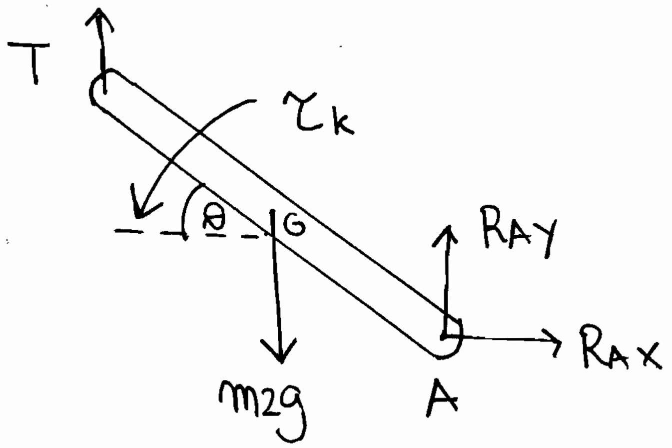
$$I_{zz1/O} = m_1 r^2$$

$\therefore$

$$d m_1 g + RF - RT = m_1 r^2 \alpha_1$$

EVALUANDO,.. $9{,}81 + 50 - T = 2{,}5\,\alpha_1 \quad (1)$

PARA LA BARRA,



$$\sum \vec{M}_{/A} = I_{zz/A}\, \vec{\alpha_2}$$

$$\sum \vec{M}_{/A} = \begin{pmatrix} -L\cos\vartheta \\ L\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L/2\cos\vartheta \\ L/2\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix}$$

$$+ k_t\left(\vartheta - (-\pi/12)\right)\hat{k}$$

$$\left(-L\cos\vartheta\, T + L/2\cos\vartheta\, m_2 g + k_t(\vartheta + \pi/12)\right)\hat{k} = I_{zz/A}\alpha_2\hat{k}$$

$$I_{zz/A} = I_{zz/G} + m_2\, \vec{r}_{AG}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \frac{L^2}{4} = \frac{1}{3} m_2 L^2$$

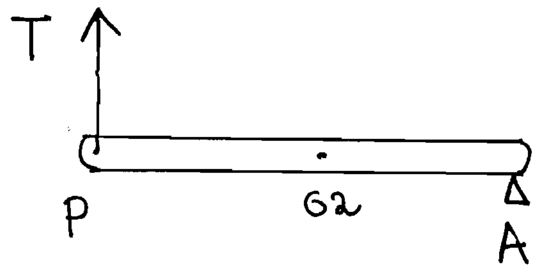
$\therefore$

$$-L\cos\vartheta\, T + L/2\cos\vartheta\, m_2 g + k_t(\vartheta + \pi/12) = \frac{1}{3} m_2 L^2 \alpha_2$$

EVALUANDO,

$$-T + 24.525 + 2{,}61799 = 1.666\,\alpha_2 \quad (2)$$

AHORA, LA ACELERACIÓN EN $t=0^+$ DEL PUNTO DE CONTACTO P ENTRE LA BARRA Y LA CUERDA ES



$$\vec{a}_P = \cancel{\vec{a}_A} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \cancel{\vec{\omega}} \times (\cancel{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/A})$$

$\vec{a}_A = 0$, $\vec{\omega} = 0$ (POR CONTINUIDAD)

$$\vec{a}_P = \alpha_2 \hat{k} \times -L\hat{\imath}$$

$$\vec{a}_P = -L\alpha_2 \hat{\jmath}$$

ADEMÁS, POR RODADURA

$$\| \vec{a}_P \| = \alpha_1 R \,, \quad \therefore \quad -L\alpha_2 = \alpha_1 R$$

EVALUANDO,

$$-\alpha_2 = \alpha_1$$

EN (1) Y (2)

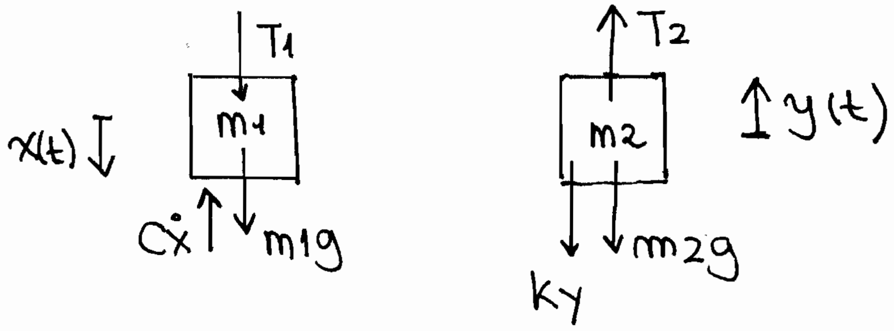
$$59{,}81 - T = 2{,}5\,\alpha_1$$
$$-T + 27{,}143 = -1.666\,\alpha_1$$

RESOLVIENDO,

$$\alpha_1 = 7{,}8413 \text{ rad/s}^2$$
$$\alpha_2 = -7{,}8413 \text{ rad/s}^2$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 4

LOS DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE PARA LAS DOS MASAS SON:



LA SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA CADA CUERPO ENTREGA:

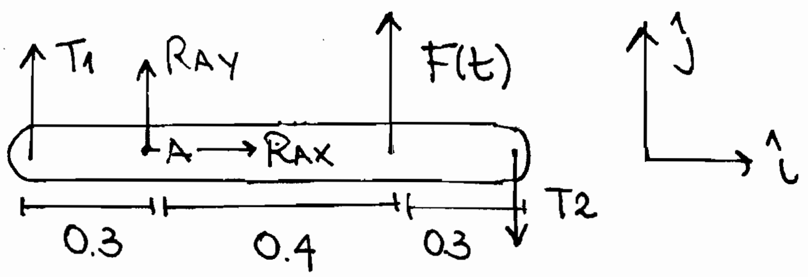
$$\sum \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \qquad i=1,2$$

$$\hat{x}: T_1 + m_1 g - c\dot{x} = m_1 \ddot{x} \quad (1)$$

$$\hat{y}: T_2 - m_2 g - Ky = m_2 \ddot{y} \quad (2)$$

AHORA, PARA LA BARRA SE TIENE

$$\sum \vec{M}_{/A} = \underbrace{I_{/\alpha}}_{\approx 0} \cdot \vec{\alpha}$$



$$\sum \vec{M}_{/A} = (-0.3)\,\hat{\imath} \times T_1 \hat{\jmath} + (0.4)\,\hat{\imath} \times F(t)\,\hat{\jmath} + 0.7\,\hat{\imath} \times -T_2 \hat{\jmath}$$

$$= \left(-0.3\, T_1 + 0.4\, F(t) - 0.7\, T_2\right) \hat{k}$$

LUEGO, EL ANÁLISIS DE MOMENTO ENTREGA,

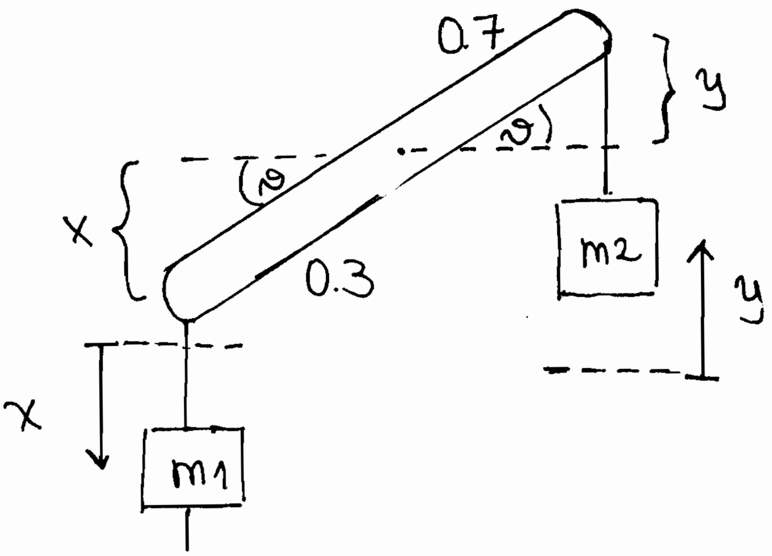
$$0.4\,F(t) - 0.3\,T_1 - 0.7\,T_2 = 0 \quad (3)$$

OBS: NOTAR QUE UN ANÁLISIS MÁS GENERAL (CUANDO LA BARRA FORMA UN ÁNGULO ϑ C/R A LA HORIZONTAL) HABRÍA ENTREGADO

$$0.4\,F(t)\cos\vartheta - 0.3\,T_1\cos\vartheta - 0.7\,T_2\cos\vartheta = 0$$

EN EL RANGO DE ϑ EN QUE T_1 Y T_2 SON VERTICALES. (PARA PEQUEÑAS OSCILACIONES), I.E VÁLIDO PARA $\cos\vartheta \approx 1$

Y SE OBTIENE (3)



ADEMÁS,

$$\sin\vartheta = \frac{x}{0.3} = \frac{y}{0.7}$$

DERIVANDO DOS VECES C/R AL TIEMPO

$$\frac{3}{7}\ddot{y} = \ddot{x}$$

CON ESTO, (1) QUEDA

$$T_1 = m_1\left(\tfrac{3}{7}\ddot{y}\right) - m_1 g + c\left(\tfrac{3}{7}\dot{y}\right)$$

REEMPLAZANDO T_1 EN (3)

$$0.4\,F(t) - 0.3\left\{\left(\frac{3}{7} m_1 \ddot{y}\right) - 0.3\,c\left(\frac{3}{7}\dot{y}\right) - m_1 g\right\}$$

$$= 0.7\,T_2$$

$\therefore$

$$T_2 = \frac{4}{7}F(t) - \frac{9}{49}m_1\ddot{y} - \frac{9}{49}c\dot{y} + \frac{3}{7}m_1 g$$

Y REEMPLAZANDO T_2 EN (2)

$$\frac{4}{7}F(t) - \frac{9}{49}m_1\ddot{y} - \frac{9}{49}c\dot{y} + \frac{3}{7}m_1 g - m_2 g - ky = m_2\ddot{y}$$

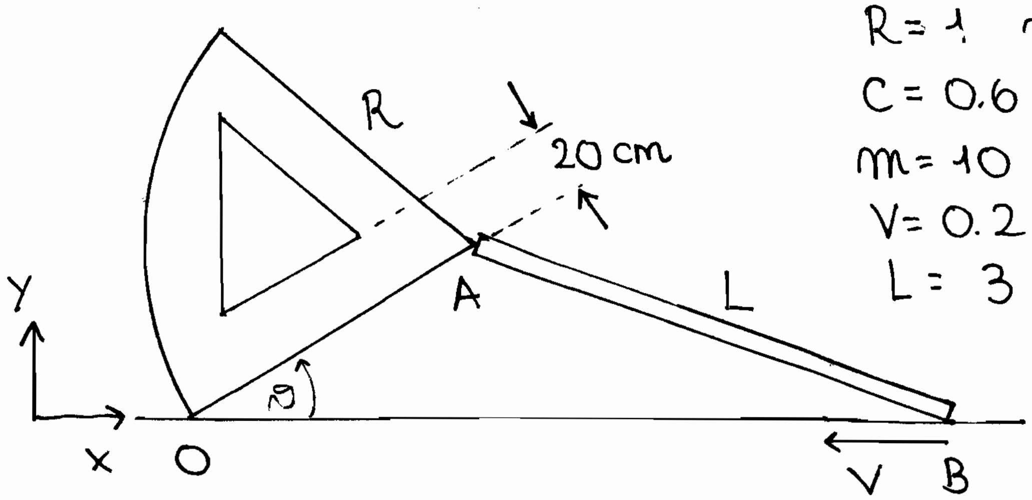
$$\ddot{y}\left(\frac{9}{7}m_1 + 7m_2\right) + \frac{9}{7}c\dot{y} + 7ky + (7m_2 - 3m_1)g = 4F(t)$$

FINALMENTE, LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA $y(t)$ ES

$$47{,}8571\,\ddot{y} + 38{,}5714\,\dot{y} + 14000\,y + 49{,}05 = 80\sin\omega t$$

PARA PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS

SOLUCIÓN PROBLEMA 5



$R = 1 \ m$

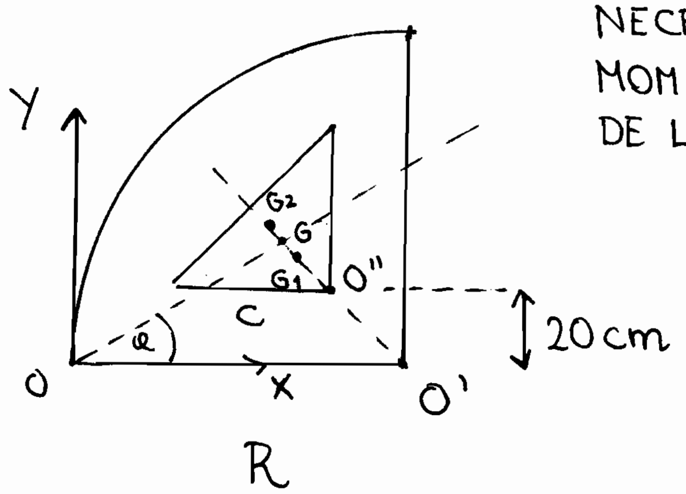
$C = 0.6 \ m$

$m = 10 \ kg$

$V = 0.2 \ m/s$

$L = 3 \ m$

a)



NECESITAMOS EL MOMENTO DE INERCIA DE LA PLACA

LA SUPERFICIE ES

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2} C^2$$

$$S = 0.6054 \ (m^2)$$

ASÍ, LA DENSIDAD SUPERFICIAL DE LA PLACA ES

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{10}{0.6054} = 16{,}5180 \ kg/m^2$$

SEAN,

1: CUARTO DE CÍRCULO RELLENO DE RADIO R $\quad m1 = \frac{\pi R^2}{4} \sigma = 12{,}9732 \ kg$

2: TRIÁNGULO ISÓSCELES DE LADO C $\quad m2 = \frac{C^2}{2} \sigma = 2{,}9732 \ kg$

OBTENGAMOS ENTONCES $I_{zz/O}$
COMO

$$I_{zz/O} = I_{zz\,1/O} + I_{zz\,2/O}$$

AHORA, USANDO QUE

$$I_{zz\,1/O'} = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

POR TEOREMA DE STEINER,

$$I_{zz\,1/O'} = I_{zz\,1/G1} + m_1 \vec{r}_{O'G1}^{\,2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 R^2 = I_{zz\,1/G1} + m_1 \left(\frac{4R}{3\pi}\sqrt{2} \right)^2$$

$$\therefore \quad I_{zz\,1/G1} = m_1 R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{32}{9\pi^2} \right) = 1{,}813 \text{ kgm}^2$$

USANDO NUEVAMENTE EL TEO. DE STEINER,

$$I_{zz\,1/O} = I_{zz\,1/G1} + m_1 \vec{r}_{OG1}^{\,2}$$

$$= 1{,}813 + 12{,}9732 \left(\left(R - \frac{4R}{3\pi} \right)^2 + \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \right)$$

$$= 8{,}4478 \text{ kgm}^2$$

POR OTRO LADO,

$$I_{zz2/O''} = \frac{m_2 c^2}{3}$$

POR STEINER,

$$I_{zz2/O''} = I_{zz2/G2} + m_2 \vec{r}_{O''G2}$$

$$\frac{m_2 c^2}{3} = I_{zz2/G2} + m_2 \left\{ \left(\frac{c}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 \right\}$$

$$\therefore \quad I_{zz2/G2} = m_2 \left[\frac{c^2}{3} - \frac{2c^2}{9} \right] = m_2 \frac{c^2}{9}$$

$$= 0{,}1189 \ kgm^2$$

LUEGO,

$$I_{zz2/O} = I_{zz2/G2} + m_2 \vec{R}_{OG2}^{\,2}$$

$$= 0{,}1189 + 2{,}9732 \left[\left(R - \left(0{,}2 + \frac{c}{3}\right)\right)^2 + \left(0{,}2 + \frac{c}{3}\right)^2 \right]$$

$$= 1{,}6650 \ kgm^2$$

FINALMENTE, SE OBTIENE $I_{zz/O} = 6{,}7828 \ kgm^2$

Y LA POSICIÓN DEL CENTRO DE MASAS ES

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_{G1} - m_2 \vec{r}_{G2}}{m_1 - m_2}$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \begin{pmatrix} R - \frac{4}{3\pi} R \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix} - m_2 \begin{pmatrix} R - (0,2 + c/3) \\ 0,2 + \frac{c}{3} \end{pmatrix}}{m_1 - m_2}$$

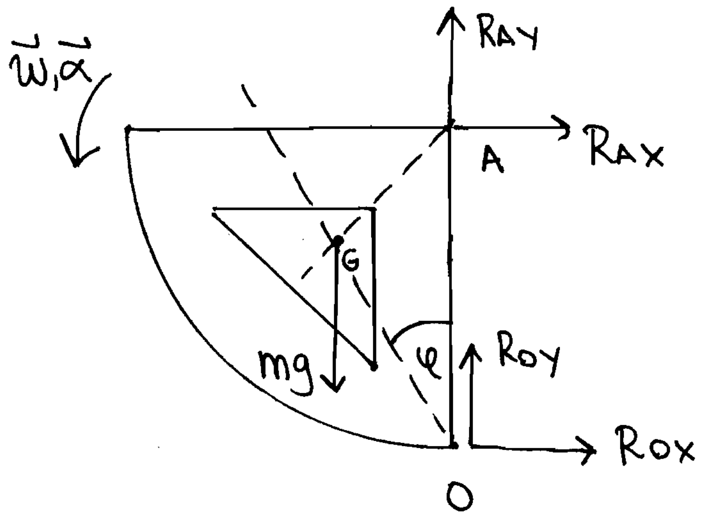
$$\vec{r}_G = \frac{12,9732}{10} \begin{pmatrix} 0,5756 \\ 0,4244 \end{pmatrix} - \frac{2,9732}{10} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_G = \begin{pmatrix} 0,5683 \\ 0,4317 \end{pmatrix}$$

Y ENTONCES

$$\varphi = tg^{-1} \left(\frac{0,4317}{0,5683} \right) = 37,2215°$$

AHORA,
PARA EL INSTANTE DE INTERÉS



$$w = \dot{\vartheta}$$

$$\alpha = \ddot{\vartheta}$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

$$i: R_{AX} + R_{OX} = m a_{GX}$$

$$j: R_{AY} + R_{OY} - mg = m a_{GY}$$

DONDE LA ACELERACIÓN DE G SE OBTIENE COMO

$$\vec{a}_G = \cancel{\vec{a}_O}^{\,0} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})\,|_{OG}$$

$$= \alpha \hat{k} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -0.4317 \\ 0.5683 \end{pmatrix}}_{\text{SEGÚN LOS "NUEVOS" EJES}} + w \hat{k} \times \left[w \hat{k} \times \begin{pmatrix} -0.4317 \\ 0.5683 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -0.5683\alpha + w^2 0.4317 \\ -0.4317\alpha + -w^2 0.5683 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad R_{Ax} + R_{Ox} = -5{,}6830\,\alpha + 4{,}3170\,w^2 \quad (1)$$

$$R_{Ay} + R_{Oy} - 98{,}1 = -4{,}3170\,\alpha - 5{,}6830\,w^2 \quad (2)$$

ADEMÁS,

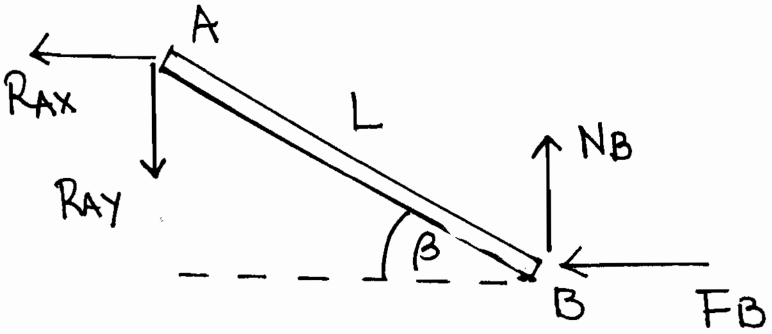
$$\sum \vec{M}_{/O} = I_{zz/O}\,\vec{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} -0.4317 \\ 0{,}5683 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -98{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{pmatrix}$$

$$= \sum \vec{M}_{/O} = 6{,}7828\,\alpha \hat{k}$$

$$42{,}3498 - R_{Ax} = 6{,}7828\,\alpha \quad (3)$$

PARA LA BARRA, SE TIENE



$$\sum \vec{F} = \cancel{m} \cancel{\vec{a}_{GB}}^{\,0}$$

$\therefore$

$$-R_{AX} - F_B = 0 \quad (4)$$
$$-R_{AY} + N_B = 0 \quad (5)$$

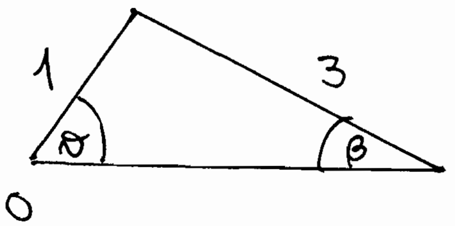
$$\sum \vec{M}_{/B} = \cancel{I_{zz/B}}\, \vec{\alpha} = 0$$

VÁLIDO PUES B ES UN PUNTO DE ACELERACIÓN NULA

$$\sum \vec{M}_{/B} = \begin{pmatrix} -L\cos\beta \\ L\sin\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R_{AX} \\ -R_{AY} \end{pmatrix} = \vec{0} \ , \quad \beta = \sin^{-1}(1/3) = 19{,}4712^\circ$$

$$0{,}9428\, R_{AY} + 0{,}3333\, R_{AX} = 0 \quad (6)$$

PODEMOS DETERMINAR ω Y α EN TÉRMINOS DE β Y SUS DERIVADAS



TEO DEL SENO

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{3}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = 3\sin\beta \quad / \, d/dt$$
$$\cos\theta\, \dot{\theta} = 3\cos\beta\, \dot{\beta} \quad (a)$$

ADEMÁS,

$$x_B = 1\cdot\cos\vartheta + 3\cos\beta \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\dot{x}_B = -\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} - 3\sin\beta\,\dot{\beta} = -0{,}2 \quad (b)$$

EN EL INSTANTE DE INTERÉS, $\vartheta = 90^\circ$
$\beta = 19{,}4712^\circ$

$$\therefore \cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\Big|_{\vartheta=90^\circ} = 0$$

$$\rightarrow \dot{\beta} \overset{ii}{=} 0$$

$$\therefore \quad -0{,}2 \overset{ii}{=} -1\cdot\dot{\vartheta}$$

$$\therefore \dot{\vartheta} \overset{ii}{=} 0{,}2 = \omega$$

DERIVANDO (a)

$$-\overset{1\,ii}{\cancel{\sin\vartheta}}\,\dot{\vartheta}^2 + \overset{0}{\cancel{\cos\vartheta}}\,\overset{ii}{\ddot{\vartheta}} = -3\overset{0\,ii}{\cancel{\sin\beta}}\,\dot{\beta}^2 + 3\cos\beta\,\ddot{\beta}$$

$$\therefore \quad -0.04 = 3\cdot 0{,}9428\,\ddot{\beta}$$

$$\ddot{\beta} \overset{ii}{=} -0{,}01414$$

DERIVANDO (b)

$$0\ \cancel{\ddot{x}_B} = -\overset{0\,ii}{\cancel{\cos\vartheta}}\,\dot{\vartheta}^2 - \overset{1\,ii}{\cancel{\sin\vartheta}}\,\ddot{\vartheta} - 3\overset{0\,ii}{\cancel{\cos\beta}}\,\dot{\beta}^2 - 3\sin\beta\,\ddot{\beta}$$

$$0 = -\ddot{\vartheta} - 3\cdot 0{,}3333\cdot(-0{,}01414)$$

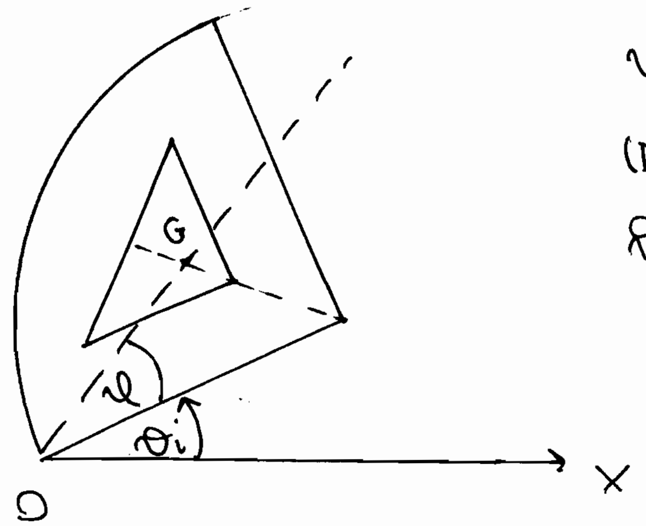
$$\ddot{\vartheta} \overset{ii}{=} 0{,}01414 \quad = \alpha$$

FINALMENTE, SE TIENE

(1) $R_{AX} + R_{OX} = 0,09232$
(2) $R_{AY} + R_{OY} = 97,8116$
(3) $R_{AX} = 42,2539 \longrightarrow R_{OX} = -42,1616$

(6) $R_{AY} = -14,9377 \longrightarrow R_{OY} = 112,7493$

b)



$\varphi = 37,2215°$
(DE LA PARTE a)
$\vartheta_i = 30°, \ \vartheta_f = 0°$

$U_g = 0$

$$E_{mec\,i} = \cancel{K_i}^{0} + U_i$$
$$= mg\,\vec{r}_{OG} \sin(\varphi + \vartheta_i) \qquad \vartheta_i = 30°$$
$$= 10 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{0,5683^2 + 0,4317^2} \cdot \sin(67,2215°)$$
$$= 64,5511 \ (J)$$

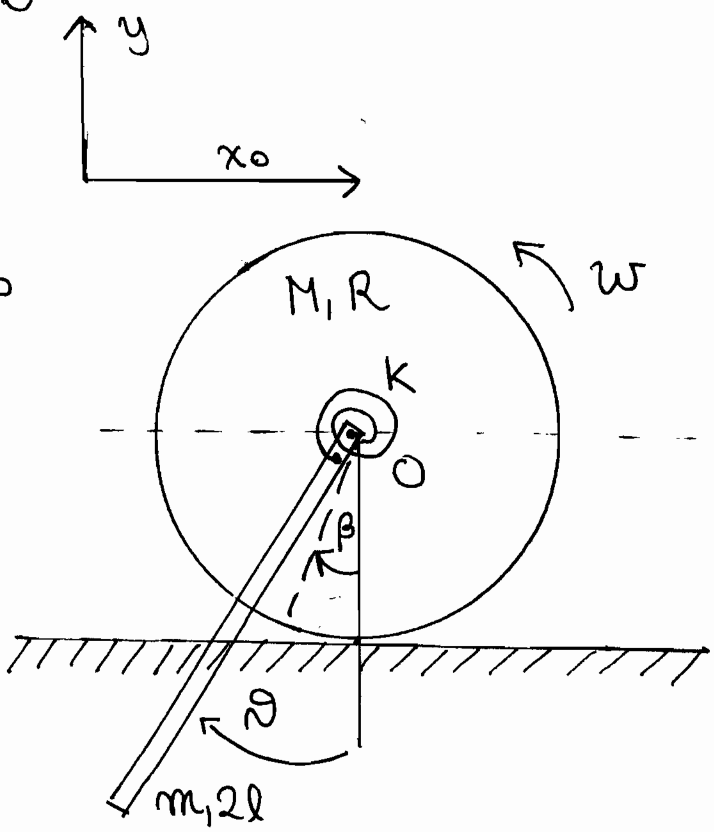
$$E_{mec\,f} = U_f + K_f$$
$$U_f = mg\,\vec{r}_{OG} \sin\varphi = 42,3497 \ (J)$$
$$K_f = \frac{1}{2} I_{zz/O} \vec{\omega}^2 = 3,3914\,\omega^2$$

COMO SE CONSERVA LA ENERGÍA,

$$E_{mec\,i} = E_{mec\,f} \rightarrow \|\vec{\omega}\| = 2,5586 \text{ rad/s}, \ \vec{\omega} = -2,5586\,\hat{k}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 6

EL MOVIMIENTO DEL DISCO SE DESCRIBE SEGÚN LA POSICIÓN ABSOLUTA DE SU CENTRO DE MASA: x_o Y SEGÚN LA POSICIÓN ANGULAR ABSOLUTA β DE UNA RECTA FIJA AL DISCO.



SI EL DISCO RUEDA SIN RESBALAR, EL CIR ESTÁ EN EL PUNTO DE CONTACTO CON EL SUELO, Y

$$R\omega = \dot{x}_o$$

DONDE $\omega = \dot{\beta}$. LUEGO, SI SE MIDEN x_o Y β A PARTIR DEL MISMO INSTANTE,

$$\beta = x_o / R$$

LA POSICIÓN DE LA BARRA QUEDA DESCRITA POR LA POSICIÓN x_o DEL EXTREMO O Y LA POSICIÓN ANGULAR ABSOLUTA ϑ. ADEMÁS, SI G ES SU CENTRO DE MASA, SU POSICIÓN C/R A TIERRA ES

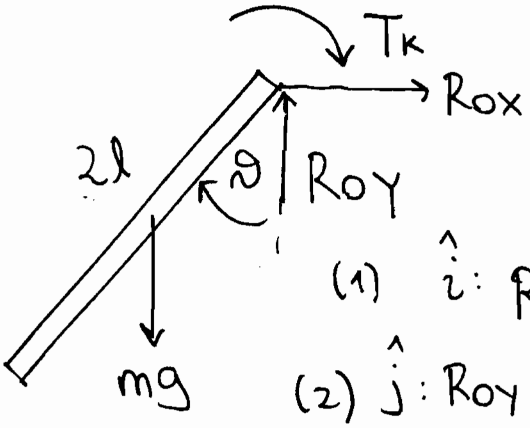
$$\vec{r}_G = \begin{pmatrix} x_o - l\sin\vartheta \\ -l\cos\vartheta + R \end{pmatrix}$$

LUEGO

$$\vec{v}_G = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 - l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} \\ l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_G = \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 - l\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} + l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 \\ l\sin\vartheta\,\ddot{\vartheta} + l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 \end{pmatrix}$$

EL DIAGRANA DE FUERZA-MOMENTO PARA LA BARRA



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

(1) $\hat{i}: \; R_{ox} = m(\ddot{x}_0 - l\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} + l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2)$

(2) $\hat{j}: \; R_{oy} - mg = m(l\sin\vartheta\,\ddot{\vartheta} + l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}^2)$

Y $$\sum \vec{M}_{/G} = I_{zz/G}\,\vec{\alpha}$$

$\therefore$

$$l(\sin\vartheta\,\hat{i} + \cos\vartheta\,\hat{j}) \times (R_{ox}\hat{i} + R_{oy}\hat{j}) + \vec{T}_K = -\frac{1}{12}m(2l)^2\ddot{\vartheta}\,\hat{k}$$

DONDE $\vec{T}_K = K(\vartheta - \beta)\,\hat{k}$ TORQUE DEL RESORTE TORSIONAL

$\therefore$

(3) $$l\sin\vartheta\,R_{oy}\,\hat{k} - l\cos\vartheta\,R_{ox} + K(\vartheta - \beta) = -\frac{1}{12}m\,4l^2\,\ddot{\vartheta}$$

UTILIZANDO LAS ECS (1) Y (2) EN (3)

$$\frac{4}{12} m l^2 \ddot{\vartheta} + K(\vartheta - \beta) + m l \sin\vartheta \left(g + l \sin\vartheta \ddot{\vartheta} + l \cos\vartheta \dot{\vartheta}^2\right)$$

$$- m l \cos\vartheta \left(\ddot{x}_o - l \cos \ddot{\vartheta} + l \sin\vartheta \dot{\vartheta}^2\right) l \cos\vartheta = 0$$

$$\frac{4}{12} m l^2 \ddot{\vartheta} + K(\vartheta - \beta) + m\left(g l \sin\vartheta + l^2 \ddot{\vartheta} - l \ddot{x}_o \cos\vartheta\right) = 0$$

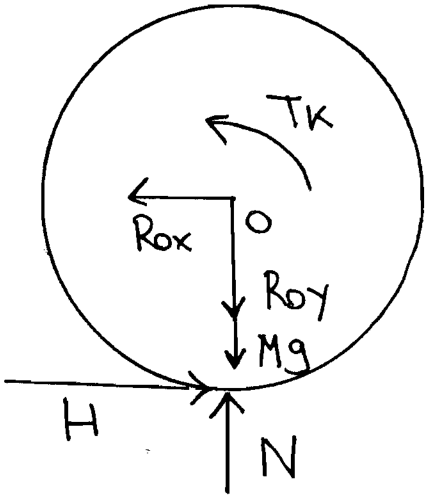
$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\vartheta} + K(\vartheta - \beta) + m g l \sin\vartheta - m l \ddot{x}_o \cos\vartheta = 0$$

USANDO $\ddot{x}_o = R \ddot{\beta}$

$$\ddot{\vartheta} - \frac{3}{4} \frac{R}{l} \ddot{\beta} \cos\vartheta + \frac{3}{4} \frac{K}{m l^2} (\vartheta - \beta) + \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin\vartheta = 0$$

PARA EL DISCO,

$$\sum \vec{F} = M \vec{a}_o$$



$\hat{i}$: $H - R_{ox} = M \ddot{x}_o$ (3)

$\hat{j}$: $N - R_{oy} - Mg = 0$ (4)

ADEMÁS,

$$\sum \vec{M}_{/O} = I_{zz/O} \vec{\alpha} = \frac{1}{2} M R^2 (-\ddot{\beta}) \hat{k}$$

$$\sum \vec{M}_{/O} = -T_K \hat{k} + -R\hat{j} \times (H\hat{i} + N\hat{j})$$

$$\Rightarrow -K(\vartheta-\beta) + RH = -\frac{M}{2}R^2\ddot{\beta}$$

$$\frac{M}{2}R^2\ddot{\beta} - K(\vartheta-\beta) + HR = 0$$

USANDO (3) Y (4)

$$\frac{M}{2}R^2\ddot{\beta} - K(\vartheta-\beta) + R(M\ddot{X}_o + R_{ox}) = 0$$

$$\frac{M}{2}R^2\ddot{\beta} - K(\vartheta-\beta) + R[m(\ddot{x}_o - l\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} + l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2) + M\ddot{x}_o] = 0$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\beta} - K(\vartheta-\beta) + R[m(R\ddot{\beta} - l\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} + l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2) + MR\ddot{\beta}] = 0$$

$$\left(\frac{3}{2}MR^2 + mR^2\right)\ddot{\beta} - mRl\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} + mRl\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 - K(\vartheta-\beta) = 0$$

FINALMENTE,

$$\ddot{\beta} - \frac{ml}{(3/2M+m)R}\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} + \frac{ml}{(3/2M+m)R}\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 - \frac{k(\vartheta-\beta)}{(3/2M+m)R^2} = 0$$

JUNTO CON

$$\ddot{\vartheta} - \frac{3}{4}\frac{R}{l}\ddot{\beta}\cos\vartheta + \frac{3}{4}\frac{K}{ml^2}(\vartheta-\beta) + \frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\vartheta = 0$$

SON LAS ECS DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA

b) LA ENERGÍA DEL DISCO ES

$$E_{DISCO} = K_{DISCO} + U_{g\,DISCO}$$

$$K_{DISCO} = \frac{1}{2} I_{zz/G}\, \vec{w}_D^{\,2} + \frac{1}{2} M \dot{x}_o^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} M (R\dot{\beta})^2$$

$$= \frac{3}{4} MR^2 \dot{\beta}^2$$

Y $U_{g\,DISCO} = 0$ (A NUESTRA ELECCIÓN)

$$\therefore \quad E_{DISCO} = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\beta}^2$$

$$E_{BARRA} = K_{BARRA} + U_{g\,BARRA}$$

$$K_{BARRA} = \frac{1}{2} m V_g^2 + \frac{I_{zz/G}}{2} \vec{w}_B^{\,2}$$

$$K_{BARRA} = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_o - l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta})^2 + (l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta})^2] + \frac{1}{2} \frac{m(2l)^2}{12} \dot{\vartheta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m [\dot{x}_o^2 - 2\dot{x}_o l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} + (l\dot{\vartheta})^2] + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\vartheta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m [\dot{x}_o^2 - 2\dot{x}_o l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}] + \frac{2}{3} ml^2 \dot{\vartheta}^2$$

$$K_{BARRA} = \frac{1}{2} m R \dot{\beta} \left[R\dot{\beta} - 2l\cos\vartheta\, \dot{\vartheta} \right] + \frac{2}{3} m l^2 \dot{\vartheta}^2$$

y $U_{g\,BARRA} = 0 - mgl\cos\vartheta$

y

$$E_{ELÁSTICA} = \frac{1}{2} k (\vartheta - \beta)^2$$

LA ENERGÍA DEL SISTEMA QUEDA

$$E = E_{DISCO} + E_{BARRA} + E_{ELÁSTICA}$$

$$E = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m R \dot{\beta} \left[R\dot{\beta} - 2l\cos\vartheta\, \dot{\vartheta} \right] + \frac{2}{3} m l^2 \dot{\vartheta}^2$$
$$- mgl\cos\vartheta + \frac{1}{2} K (\vartheta - \beta)^2$$