Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
ICM1022 Mecánica Vectorial

Ayudantía 6

Fabián Cádiz C.
facadiz@ing.puc.cl

1. **Problema 1**
   La barra AB de largo L se apoya sobre un disco inmóvil de radio R, mientras su extremo A se mueve sobre el eje X (guía horizontal que pasa por O, centro del disco). Determinar
   a) Base del CIR de la barra
   b) Rodante del CIR de la barra
   c) Calcular la velocidad de B, si la velocidad de A es $10\,\hat{\imath}$ (m/s) , $R = 1$ (m), $L = 3$(m), $OA = 2,5$ (m)

   Problema 2
   Una barra rígida de largo $L = 2$ (m) posee pasadores en sus extremos A y B, que pueden deslizar sin roce sobre un perfil parabólico $y = 2x^2$
   a) Determinar analíticamente la posición del CIR de la barra en el instante en que A pasa por el vértice de la parábola y B está en el primer cuadrante
   b) Si para las condiciones de a), además se sabe que la velocidad de A es $10\hat{\imath}$ (m/s), calcular la velocidad de B

   Problema 3
   Un motor en A impulsa a la barra AB a girar con velocidad angular de magnitud constante en el sentido del reloj. Calcular la velocidad angular de las barras BC y CD, así como también la velocidad absoluta de los puntos B y C en el instante en que A,B y C están alineados

   Problema 4
   Una estación espacial gira a w_e (rad/s) alrededor de la Tierra (una vuelta cada 12 horas) en órbita circular de radio $R = 150000$ (km) . Un problema que se debe resolver para hacerla habitable a cualquier persona, es tratar de simular la aceleración de gravedad terrestre de ella. Una forma de empezar a resolver el problema es analizando la aceleración absoluta en diversos puntos de ella, debido a una velocidad angular relativa de magnitud w_r (rad/s). El radio de la estación espacial es $r = 200$ (m). Se pide calcular
   a) El valor de w_r para obtener en el punto P una aceleración absoluta de magnitud g
   b) La aceleración absoluta a la que es sometido un ascensor espacial A, si desliza por el rayo CP con velocidad relativa de magnitud constante $v_r = 25$ (m/s) , en el instante en que pasa por Q (punto medio de CP)

Problema 5

El sistema de la figura consiste de un disco rígido horizontal de radio $2R = 6$ (m) , que rota en torno al eje vertical que pasa por su centro. Un segundo disco, vertical, de radio $R = 3$(m), se ubica en una ranura del primer disco, y rota en torno a su centro con velocidad angular de magnitud constante w, unido por un pasador al primer disco. Una partícula P desliza a lo largo de una ranura radial en el disco vertical. El disco horizontal rota con $\Omega = 1$ (rad/s), y la partícula desliza con velocidad $v_p = 1$ (m/s) a lo largo de la ranura. En el instante de interés, $\phi = 15$, $\alpha = 30$,$CP = 2$(m). Determine

a) La velocidad absoluta de P en términos de la velocidad angular constante w del disco de radio R

b) La velocidad angular w de forma que en el instante de la figura, la aceleración absoluta del punto P tenga mangitud 10 (m/s^2)

Problema 6

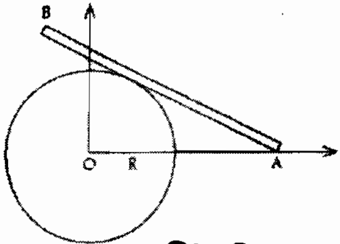
El tanque de la figura avanza horizontalmente con velocidad constante de magnitud $V = 5$ (m/s). El tanque está compuesto por la oruga, la torreta (que puede moverse verticalmente con velocidad de magnitud V_t y aceleración de magnitud A_t, además de poder girar con velocidad angular de magnitud w_1 con respecto a la vertical Y^1) y el cañón AB (que puede girar en torno al eje Z^1 con velocidad angular constante de magnitud w_2. El largo del cañon es $L = 2$ (m). En el instante representado en la figura, $\vartheta = \pi/3$, $V_t = 3$(m/s), $A_t = 1$ (m/s^2), $w_2 = 1$ (rad/s), la bala P se encuentra en el extremo B del cañón y su velocidad relativa al punto A tiene magnitud constante $V_{rel} = 720$ (km/h). Se pide calcular

a) Posición del CIR del cañón en el plano XY, respecto de A, si $w_1 = cte = 0$

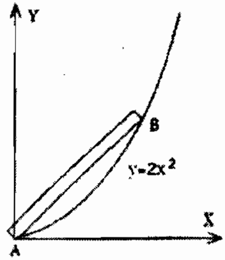
b) Si el cañón es una barra delgada de masa $M = 100$ (kg), calcular su energía cinética para el instante de la parte a

c) Aceleración absoluta de la bala si $w_1 = cte = 3$ (rad/s)

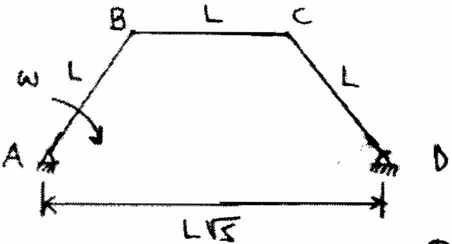
PROBLEMA 1



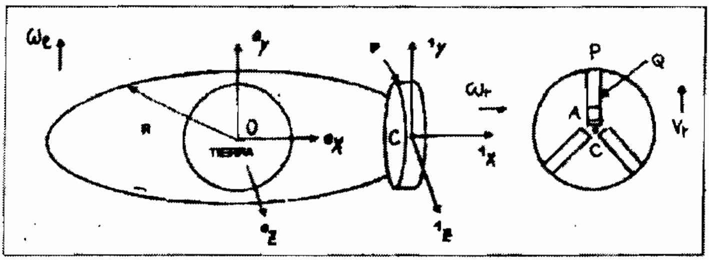
PROBLEMA 2

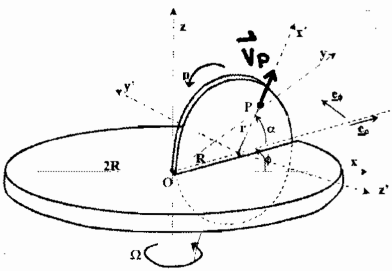


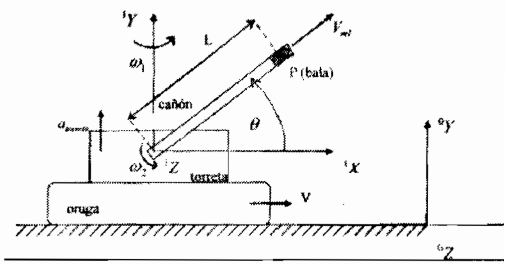
PROBLEMA 3



PROBLEMA 4





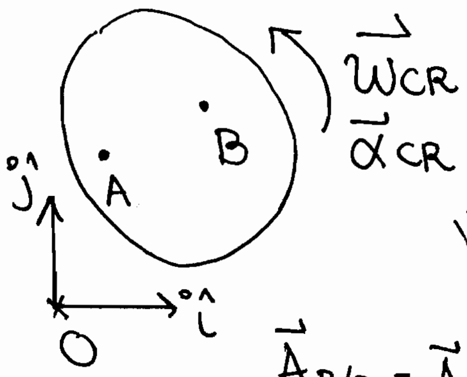


PROBLEMA 5

PROBLEMA 6

CAPÍTULO 5 : CINEMÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS (2D)

SI A Y B PERTENECEN AL MISMO CR, ENTONCES



$$\vec{V}_{B/O} = \vec{V}_{A/O} + \vec{\omega}_{CR} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{A}_{B/O} = \vec{A}_{A/O} + \vec{\alpha}_{CR} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega}_{CR} \times (\vec{\omega}_{CR} \times \vec{r}_{B/A})$$

CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (CIR)

TODO CR QUE ROTA POSEE UN PUNTO CON VELOCIDAD NULA RESPECTO AL CUAL "RUEDA SIN DESLIZAR", ES DECIR

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_{CR} \times \vec{r}_{B/CIR} \quad , \quad B \in C.R$$

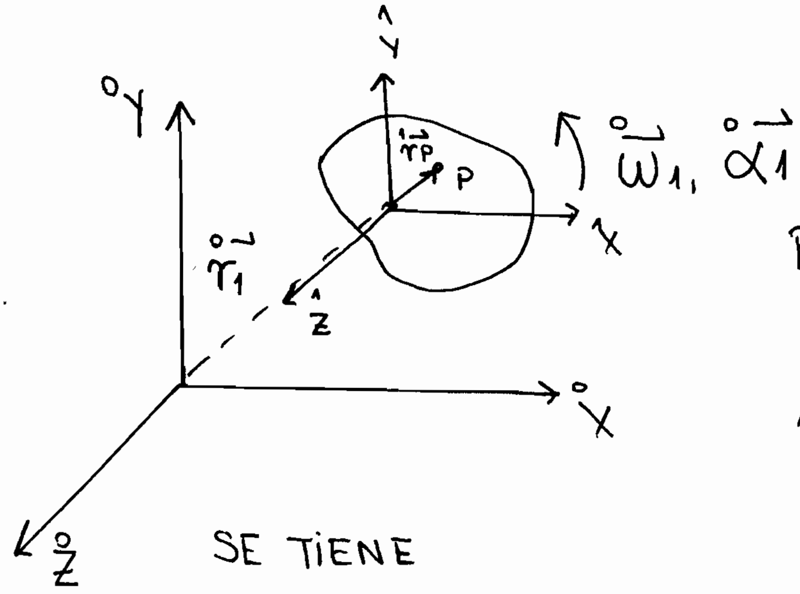
EL CIR EXISTE Y ES ÚNICO en 2D.

SE DESPRENDE QUE $\vec{V}_B \perp \vec{r}_{B/CIR}$

BASE DEL CIR: LUGAR GEOMÉTRICO QUE DESCRIBE EL CIR C/R A UN SISTEMA FIJO

RODANTE DEL CIR: LUGAR GEOMÉTRICO QUE DESCRIBE EL CIR C/R A UN SISTEMA RELATIVO

MOVIMIENTO RELATIVO DE PARTÍCULAS C/R A UN C.R.



P: PARTÍCULA CON VEL. Y ACELERACIÓN C/R A EJES "1"
${}^{1}\vec{V}_P$, ${}^{1}\vec{a}_P$ RESPECTIVAMENTE

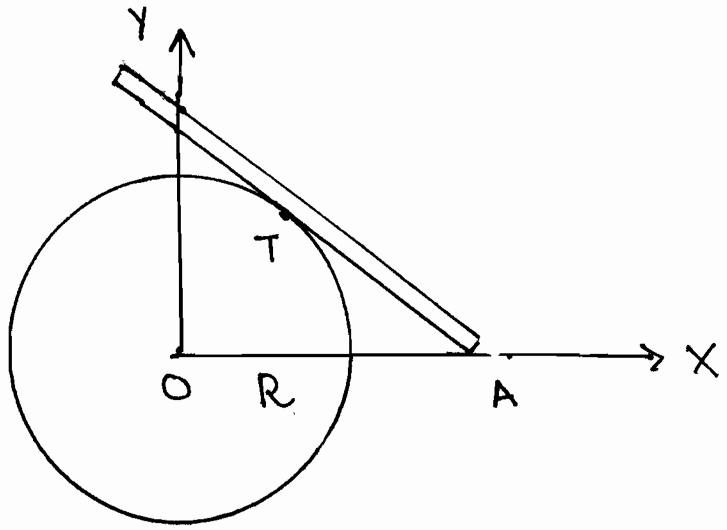
SE TIENE

$$ {}^{0}\vec{V}_P = {}^{0}\vec{V}_1 + {}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P + {}^{1}\vec{V}_P $$

$$ {}^{0}\vec{a}_P = {}^{0}\vec{a}_1 + {}^{0}\vec{\alpha}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P + {}^{0}\vec{\omega}_1 \times ({}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P) + {}^{1}\vec{a}_P + 2\,{}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{V}_P $$

EL TÉRMINO $2\,{}^{0}\vec{W}_1 \times {}^{1}\vec{V}_P$ CORRESPONDE A LA ACELERACIÓN DE CORIOLIS, Y SU EFECTO ES APRECIABLE CUANDO LA VELOCIDAD RELATIVA ES GRANDE

SOLUCIÓN PROBLEMA 1



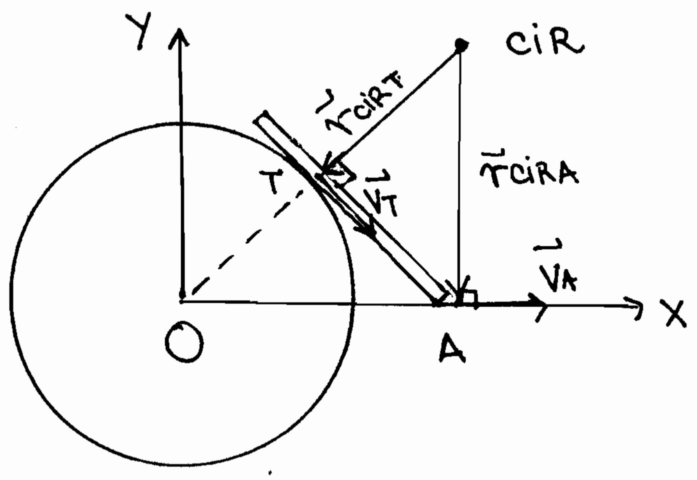
SEA T EL PUNTO DE TANGENCIA ENTRE EL DISCO Y LA BARRA (T PERTENECE A LA BARRA)

SE TIENE QUE $\vec{V}_T$ EN EL INSTANTE DE INTERÉS ES TANGENTE AL DISCO

AHORA, COMO PARA CUALQUIER PUNTO P PERTENECIENTE A LA BARRA SE TIENE

$$\vec{V}_T \perp \vec{r}_{CIRP}$$

SE TIENE PARA LOS PUNTOS T Y A LA SIGUIENTE CONFIGURACIÓN



POR SEMEJANZA,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{ACIR}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{TA}}$$

DEFINIENDO

$$\overline{OA} = x$$

$$\overline{ACIR} = y$$

ADEMÁS,
$$\overline{OT} = R$$
$$\overline{TA} = \sqrt{x^2 - R^2}$$

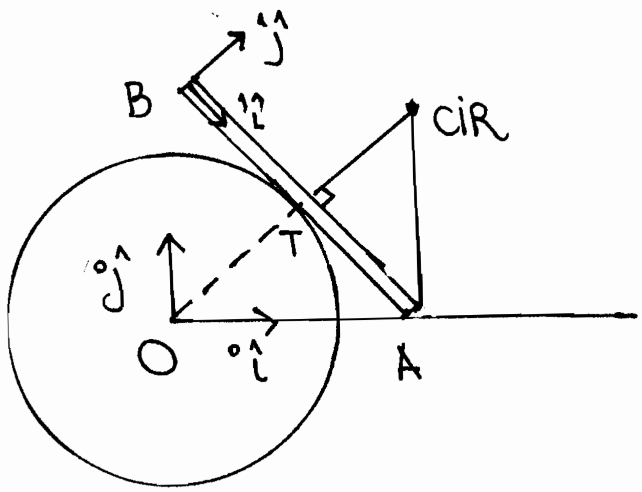
$\therefore$

$$\frac{x}{y} = \frac{R}{\sqrt{x^2-R^2}}$$

LA BASE DEL CIR (O LUGAR GEOMÉTRICO DEL CIR C/R A UN SISTEMA DE REFERENCIA FIJO ES

$$Y^2 = \frac{X^4}{R^2} - X^2$$

b) SEA X_{r1} UN SISTEMA DE REFERENCIA SOLIDARIO A LA BARRA CON CENTRO EN B COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA



SEAN
$$x_1 = \overline{BT}$$
$$y_1 = \overline{TCIR}$$

(x_1, y_1) ES LA POSICIÓN DEL CIR EN EL SISTEMA 1

POR SEMEJANZA,

$$\frac{\overline{TCIR}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OT}} \rightarrow \frac{y_1}{L-x_1} = \frac{L-x_1}{R}$$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{(L-x_1)^2}{R}$$

RODANTE DEL CIR

c) DEL ENUNCIADO: $\vec{V_A} = 10 \ m/s$

$R = 1 \ m$

$L = 3 \ m$

$OA = 2{,}5 \ m$

$OA = 2{,}5 = x_{CIR}$

DE LA ECUACIÓN PARA LA BASE

$$y^2 = \frac{x^4}{R^2} - x^2$$

$$\therefore \quad y_{CIR} = \sqrt{\frac{2{,}5^4}{1^2} - 2.5^2} = 5{,}72822 \ m$$

CON ESTO, LA VELOCIDAD DE A SE PUEDE REESCRIBIR DE LA SIGUIENTE MANERA

$$\vec{V_A} = \vec{W_{CR}} \times \vec{r}_{A/CIR}$$

Y $\vec{r}_{A/CIR} = \vec{r}_A - \vec{r}_{CIR} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5{,}72822 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -5{,}72822 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

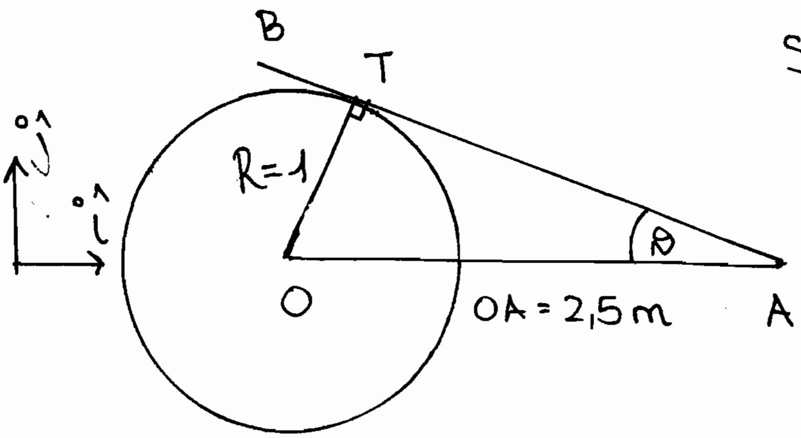
$$10 \ \hat{i} = W_{CR} \hat{k} \times (-5{,}72822 \hat{j})$$

$$10 \ \hat{i} = 5{,}72822 \ W_{CR} \ \hat{i}$$

$$W_{CR} = 1{,}745743 \ rad/s$$

LUEGO

$$\vec{V}_B = \vec{w}_{CR} \times \vec{r}_{B/CIR}$$



$$\sin\theta = \frac{R}{OA} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2.5}$$

$$\therefore \quad \theta = 23{,}5781°$$

LUEGO

$$\vec{r}_B = -(L\cos\theta - \overline{OA})\,\hat{i} + L\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_B = -0.24955\,\hat{i} + 1{,}19999\,\hat{j}$$

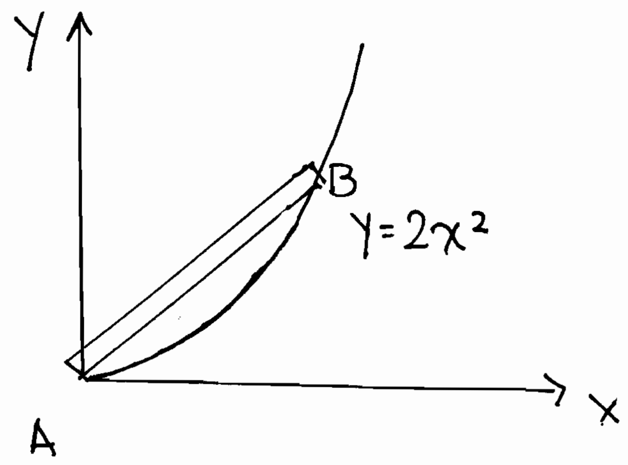
$$\therefore \quad \vec{r}_{B/CIR} = \vec{r}_B - \vec{r}_{CIR} = -2{,}74955\,\hat{i} - 4{,}52823\,\hat{j}$$

$$\therefore$$

$$\vec{V}_B = 1{,}745743\,\hat{k} \times (-2{,}74955\,\hat{i} - 4{,}52823\,\hat{j})$$

$$\vec{V}_B = -4{,}8\,\hat{j} + 7{,}9051\,\hat{i}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 2



$L = 2m$

a) GEOMÉTRICAMENTE, DEBE TENERSE

$\vec{r}_{CIRA} \perp \vec{V}_A , \quad \vec{r}_{CIRB} \perp \vec{V}_B$

CONSIDERANDO QUE EN EL INSTANTE DE INTERÉS $\vec{V}_A$ ES HORIZONTAL, SE DEBE TENER

$$\vec{r}_{CIR} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{CIR} \end{pmatrix}$$

EL PUNTO B ADEMÁS SATISFACE

$$2X_B^2 = Y_B$$

ADEMÁS,

$$L^2 = X_B^2 + Y_B^2 = 4$$

$$\therefore \quad X_B = 0.939565$$
$$Y_B = 1.765564$$

LUEGO $\quad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0.939565 \\ 1.765564 \end{pmatrix}$

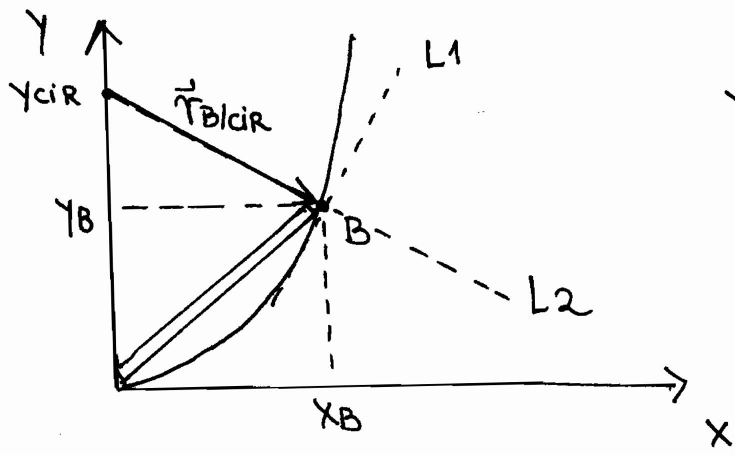
COMO LA VELOCIDAD ES SIEMPRE TANGENTE A LA TRAYECTORIA, LA DIRECCIÓN DE $\vec{V}_B$ DEBE SER LA MISMA QUE LA DE LA RECTA TANGENTE A $y = 2x^2$ EN $x = x_B$. (LLAMÉMOSLA L_1)

LA PENDIENTE DE ESTA RECTA ESTÁ DADA POR

$$y' = 4x\Big|_{x_B} = 3{,}75826 = m_{L1}$$

DADO QUE $\vec{r}_{B/CIR} \perp \vec{V}_B$, LA DIRECCIÓN DE $\vec{r}_{B/CIR}$ COINCIDE CON LA DE LA RECTA PERPENDICULAR A L_1, CUYA PENDIENTE ESTÁ DADA POR

$$m_{L2} = -\frac{1}{m_{L1}} = \frac{-1}{3.75826} = -0.26608$$



$Y_{CIR} \in L_2$, LUEGO

$$Y_{CIR} = m_{L2} \cdot 0 + n$$

$$Y_{CIR} = n$$

n SE OBTIENE CONSIDERANDO QUE $B \in L_2$

$$Y_B = m_{L2} X_B + n$$

$$1.765564 = -0.2668 \cdot 0.939565 + n$$

$$n = Y_{CIR} = 2.01624$$

LUEGO $\vec{r}_{CIR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.01624 \end{pmatrix}$

b) $\vec{V}_A = 10\hat{i}$ (m/s)

COMO $\vec{V}_A \perp \vec{r}_{A/CIR}$, Y

$$\vec{r}_{A/CIR} = \vec{r}_A - \vec{r}_{CIR} \overset{(ii)}{=} \vec{0} - \vec{r}_{CIR} = -\vec{r}_{CIR}$$

$$\vec{V}_A \cdot \vec{r}_{A/CIR} = 0 \quad \text{OK!}$$

AHORA, POR PROPIEDAD DE CUERPO RIGIDO

$$\vec{V}_A = \omega_{CR} \vec{k} \times \vec{r}_{A/CIR}$$

$$= \omega_{CR} \hat{k} \times (-\vec{r}_{CIR}) = \omega_{CR} Y_{CIR} \hat{i}$$

$$= 10\hat{i}$$

LUEGO, $\omega_{CR} = 10 / Y_{CIR} = 4.95973 \text{ rad/s}$

CON ESTO,

$$\vec{V}_B = \omega_{CR} \vec{k} \times \vec{r}_{B/CIR}$$

Y $\vec{r}_{B/CIR} = \vec{r}_B - \vec{r}_{CIR} \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} 0.939565 \\ 1.765564 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2.01624 \end{pmatrix}$

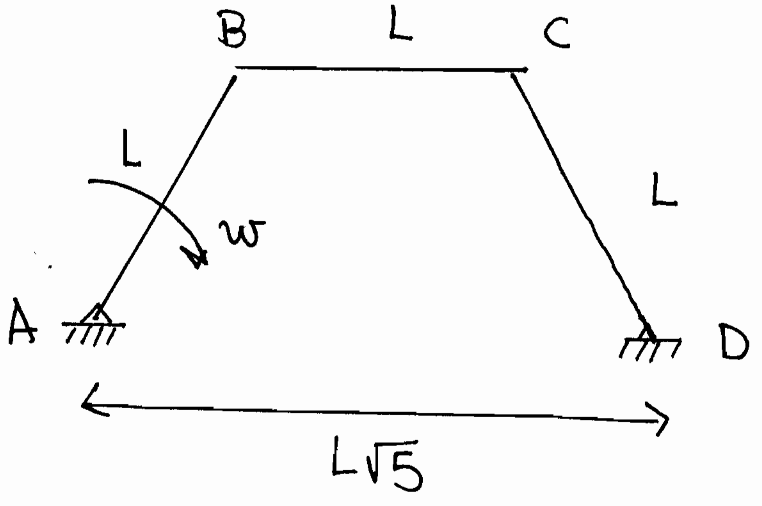
$$\vec{r}_{B/CIR} = \begin{pmatrix} 0.939565 \\ -0.250676 \end{pmatrix}$$

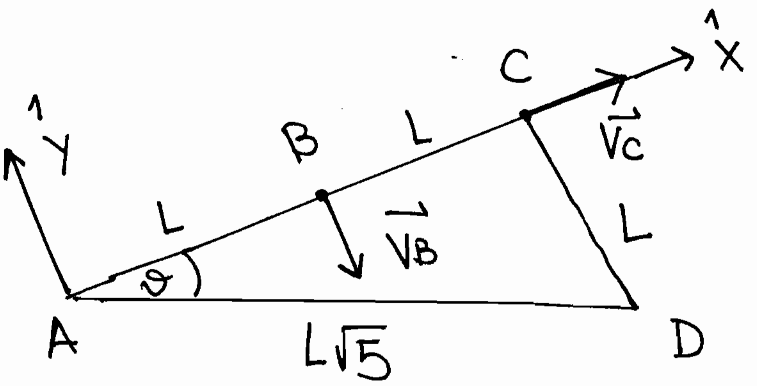
Así,

$$\vec{V}_B = 4.95973\,\hat{k} \times \begin{pmatrix} 0.939565 \\ -0.250676 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_B = \begin{pmatrix} 1.243285 \\ 4.659988 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 3





DADO QUE $\overline{AD} = L\sqrt{5}$,
SE SATISFACE EN EL INSTANTE DE INTERÉS

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$$

$$\rightarrow \overline{AC} \perp \overline{CD}$$

BUSQUEMOS EL CIR DE CADA BARRA

$\overline{AB}$: CIR = A

$\overline{CD}$: CIR = D

$\overline{BC}$: CIR = ?

FIJÉMONOS EN LA VELOCIDAD DE DOS PUNTOS QUE PERTENEZCAN AL CUERPO RÍGIDO BC

SEGÚN LOS EJES $\hat{x}, \hat{y}$ DEFINIDOS ANTERIORMENTE, $\vec{V}_B$ APUNTA SEGÚN $-\hat{j}$, NECESARIAMENTE.

DEL MISMO MODO, $\vec{V}_C$ APUNTA SEGÚN $\hat{i}$

POR UNA PARTE, EL CIR DEBE ESTAR SOBRE LA PERPENDICULAR A $\vec{V}_B$, QUE PASA POR B.

POR OTRO LADO, EL CIR DEBE ESTAR SOBRE LA PERPENDICULAR A $\vec{V}_C$, QUE PASA POR C

$\Rightarrow$ CIR DE BC ES EL PUNTO C. (ENTONCES $\vec{V}_C = 0$)

LUEGO

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{B/C}$$

$$= \vec{\omega}_{BC}\,\hat{k} \times (-L\,\hat{i}) = -\omega_{BC} L\,\hat{j}$$

PERO,

$$\vec{V}_B = \underbrace{\cancel{\vec{V}_A}}_{0} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$= -\omega\,\hat{k} \times L\,\hat{i} = -\omega L\,\hat{j}$$

SE CONCLUYE ENTONCES, $\omega_{BC} = \omega$

$$\therefore \quad \vec{\omega}_{BC} = \omega\,\hat{k}$$

POR OTRA PARTE, SI $\vec{V}_C = \vec{0} = \vec{V}_D$, ES CLARO QUE

$$\omega_{CD} = 0$$

(RECORDAR QUE EL CIR DE $\overline{CD}$ ES D)

POR ÚLTIMO,

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = -\omega\hat{k} \times L\,\hat{i}' = -\omega L\,\hat{j}'$$

EN EJES ESTACIONARIOS,

$$\hat{j}' = -\sin\theta\,{}^{\circ}\hat{i} + \cos\theta\,{}^{\circ}\hat{j}$$

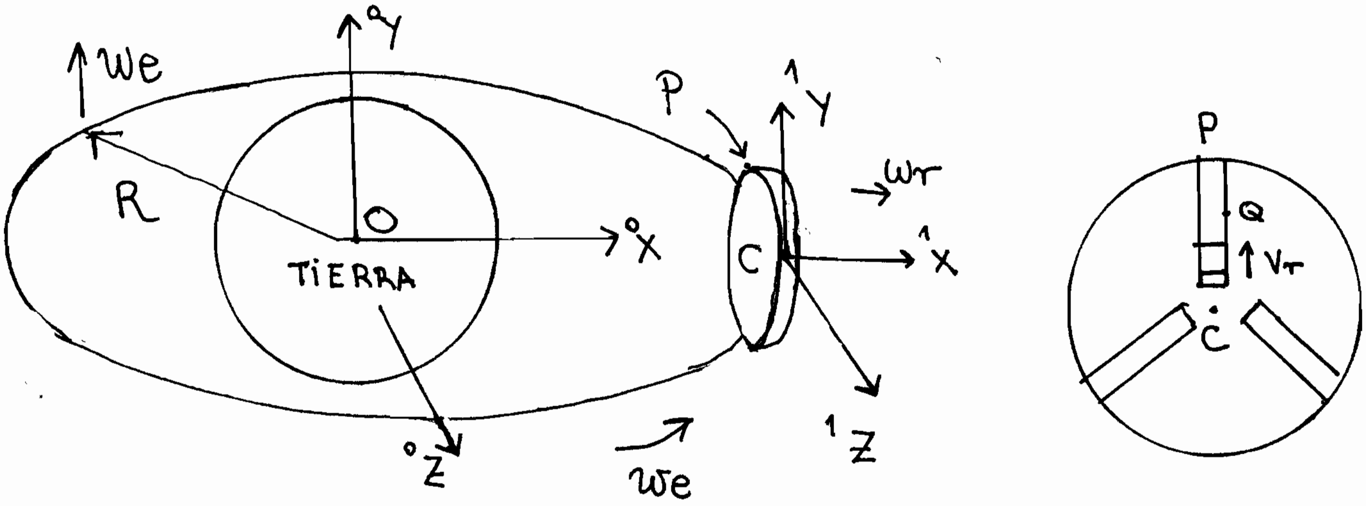
DONDE

$$\sin\theta = 1/\sqrt{5}$$
$$\cos\theta = 2/\sqrt{5}$$

$\therefore$

$$\vec{V}_B = \begin{pmatrix} \omega L/\sqrt{5} \\ -2\omega L/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 4



$w_e = 1$ VUELTA /12 HORAS

$R = 150.000 \text{ km} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ m}$

$r = 200 \text{ (m)}$

$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$

a) DEFINIMOS LOS SISTEMAS DE REFERENCIA

S_{r0} : ESTACIONARIO, ORIGEN EN O

S_{r1} : SOLIDARIO A LA ESTACIÓN, ORIGEN C

EN EL INSTANTE DE INTERÉS, $\,^1\hat{i} \,//\, ^0\hat{i}$

$^1\hat{j} \,//\, ^0\hat{j}$

$^1\hat{k} \,//\, ^0\hat{k}$

DE LA CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA EN SISTEMAS RELATIVOS

$$^0\vec{a}_P = {}^0\vec{a}_1 + {}^0\vec{\alpha}_1 \times {}^1\vec{r}_P + {}^0\vec{\omega}_1 \times ({}^0\vec{\omega}_1 \times {}^0\vec{r}_P) + 2\,{}^0\vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{V}_P + {}^1\vec{a}_P$$

ENCONTREMOS

$$^0\vec{a}_1 = \vec{a}_{oc} = \cancel{\vec{\alpha}}^{\,0} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\big|_{oc}$$

$$= w_e\,{}^0\hat{j} \times (w_e\,{}^0\hat{j} \times R\,{}^1\hat{i})$$

EN EL INSTANTE DE INTERÉS

$$ {}^{1}\hat{i} \parallel {}^{0}\hat{i} \rightarrow {}^{0}\vec{a}_1 \overset{(ii)}{=} -W_e^2 R\,{}^{0}\hat{i} $$

Y

$$ W_e = \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}4544 \cdot 10^{-4} \text{ rad/seg} $$

$$ {}^{0}\vec{a}_1 \overset{(ii)}{=} -3{,}1731\,{}^{0}\hat{i} $$

$$ {}^{0}\vec{w}_1 = \vec{w}_e + \vec{w}_r = W_e\,{}^{0}\hat{j} + w_r\,{}^{1}\hat{i} \overset{(ii)}{=} w_r\,{}^{0}\hat{i} + 1{,}4544 \cdot 10^{-4}\,{}^{0}\hat{j} $$

$$ {}^{0}\vec{\alpha}_1 = \frac{d}{dt}\,{}^{0}\vec{w}_1 = \underbrace{\cancel{\dot{w}_e}}_{0}\,{}^{0}\hat{j} + w_e \frac{d}{dt}\,{}^{0}\hat{j} + \overset{0}{\cancel{\dot{w}_r}}\,{}^{1}\hat{i} + w_r \frac{d}{dt}\,{}^{1}\hat{i} $$

Y

$$ \frac{d}{dt}\,{}^{0}\hat{j} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\,{}^{1}\hat{i} = \vec{w}_{1}\times{}^{1}\hat{i} = W_e\,{}^{0}\hat{j} \times {}^{1}\hat{i} \overset{(ii)}{=} -W_e\,{}^{0}\hat{k} $$

$\therefore$

$$ {}^{0}\vec{\alpha}_1 \overset{(ii)}{=} -W_e W_r\,{}^{0}\hat{k} = -1{,}4544 \cdot 10^{-4}\, W_r\,{}^{0}\hat{k} $$

$$ {}^{1}\vec{r}_P = r\,{}^{1}\hat{j} = 200\,{}^{1}\hat{j} \overset{(ii)}{=} 200\,{}^{0}\hat{j} $$

CON ESTO:

$$ {}^{0}\vec{\alpha}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P \overset{(ii)}{=} -1{,}4544 \cdot 10^{-4}\, W_r\,{}^{0}\hat{k} \times 200\,{}^{0}\hat{j} $$

$$ = 0{,}02909\, W_r\,{}^{0}\hat{i} $$

$$ {}^0\vec{\omega}_1 \times ({}^0\vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{r}_P) \overset{(ii)}{=} (\omega_r\,{}^0\hat{i} + 1{,}4544 \cdot 10^{-4}\,{}^0\hat{j}) \times \left[(\omega_r\,{}^0\hat{i} + 1{,}4544 \cdot 10^{-4}\,{}^0\hat{j}) \times 200\,{}^0\hat{j} \right] $$

$$ = (\omega_r\,{}^0\hat{i} + 1{,}4544 \cdot 10^{-4}\,{}^0\hat{j}) \times 200\,\omega_r\,{}^0\hat{k} $$

$$ = -200\,\omega_r^2\,{}^0\hat{j} + 0{,}02909\,\omega_r\,{}^0\hat{i} $$

ADEMÁS,

$$ {}^1\vec{V}_P = \vec{0} \rightarrow {}^1\vec{a}_P \qquad \text{(P ESTACIONARIO EN } S_r\,1) $$

$$ {}^0\vec{a}_P \overset{(ii)}{=} {}^0\vec{a}_1 + {}^0\vec{\alpha}_1 \times {}^1\vec{r}_P + {}^0\vec{\omega}_1 \times ({}^0\vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{r}_P) + 0 $$

$$ = -3{,}1731\,{}^0\hat{i} + 0{,}02909\,\omega_r\,{}^0\hat{i} - 200\,\omega_r^2\,{}^0\hat{j} + 0{,}02909\,\omega_r\,{}^0\hat{i} $$

$$ {}^0\vec{a}_P \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} -3{,}1731 + 0{,}05818\,\omega_r \\ -200\,\omega_r^2 \\ 0 \end{pmatrix} $$

LUEGO, SE BUSCA ω_r TAL QUE

$$ |a_P| = g $$

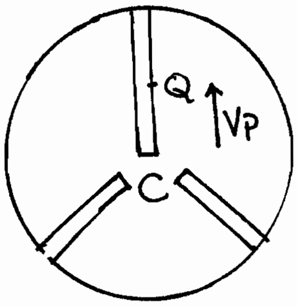
$$ \|a_P\|^2 = 40.000\,\omega_r^4 + 0{,}003385\,\omega_r^2 - 0{,}3692\,\omega_r + 10{,}0686 $$

$$ = g^2 = 96{,}2361 $$

RESOLVIENDO, LAS SOLUCIONES REALES SON

$$ \omega = \pm 0{,}2155 \text{ rad/seg} $$

b)



$$|CQ| = \frac{r}{2} = 100\,m$$

$$\omega_r = 0{,}2155 \text{ rad/s}$$

$$V_r = 25 \text{ m/s}$$

NUEVAMENTE

$${}^{\circ}\vec{a}_1 \overset{(ii)}{=} -3{,}1731\,{}^{\circ}\hat{i}$$

$${}^{\circ}\vec{\omega}_1 \overset{(ii)}{=} 0{,}2155\,{}^{\circ}\hat{i} + 1{,}4544\cdot10^{-4}\,{}^{\circ}\hat{j}$$

$${}^{\circ}\vec{\alpha}_1 \overset{(ii)}{=} -3{,}1342\cdot10^{-5}\,{}^{\circ}\hat{k}$$

Y $${}^{1}\vec{r}_A \overset{(ii)}{=} 100\,{}^{\circ}\hat{j}$$

$$\rightarrow {}^{\circ}\vec{\alpha}_1 \times {}^{1}\vec{r}_A \overset{(ii)}{=} 0{,}0031342\,{}^{\circ}\hat{i}$$

$${}^{\circ}\vec{\omega}_1 \times ({}^{\circ}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_A) \overset{(ii)}{=} (0{,}2155\,{}^{\circ}\hat{i} + 1{,}4544\cdot10^{-4}\,{}^{\circ}\hat{j}) \times [(0{,}2155\,{}^{\circ}\hat{i} + 1{,}4544\cdot10^{-4}\,{}^{\circ}\hat{j}) \times 100\,{}^{\circ}\hat{j}]$$

$$= (0{,}2155\,{}^{\circ}\hat{i} + 1{,}4544\cdot10^{-4}\,{}^{\circ}\hat{j}) \times 21{,}55\,{}^{\circ}\hat{k}$$

$$= -4{,}6440\,{}^{\circ}\hat{j} + 0{,}0031342\,{}^{\circ}\hat{i}$$

Y $${}^{1}\vec{V}_A \overset{(ii)}{=} V_r\,{}^{\circ}\hat{j} = 25\,{}^{\circ}\hat{j}$$

$$\therefore \quad 2\,{}^{\circ}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{V}_A \overset{(ii)}{=} 2(0{,}2155\,{}^{\circ}\hat{i} + 1{,}4544\cdot10^{-4}\,{}^{\circ}\hat{j}) \times 25\,{}^{\circ}\hat{j}$$

$$= 10{,}7750\,{}^{\circ}\hat{k}$$

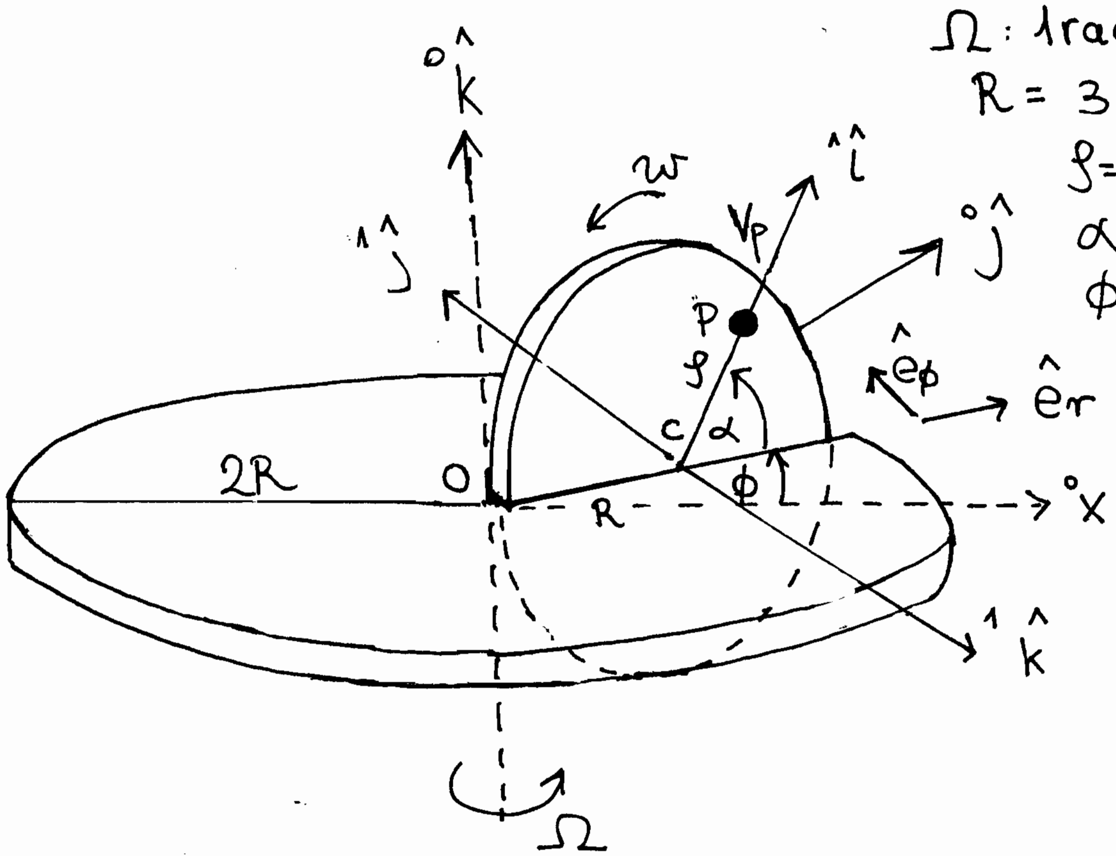
Y $${}^{1}\vec{a}_A = \vec{0}$$

CON TODO ESTO

$$ {}^{0}\vec{a}_A = \begin{pmatrix} -3{,}1731 + 0{,}0031342 + 0{,}0031342 \\ -4{,}6440 \\ 10{,}7750 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{0}\vec{a}_A \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} -3{,}1668 \\ -4{,}6440 \\ 10{,}7750 \end{pmatrix} \quad m/s^2 $$

SOLUCIÓN PROBLEMA 5



Ω: 1rad/seg
$R = 3\,m$
$\rho = 2\,m$
$\alpha = 30°$
$\phi = 15°$
$V_P = 1\,m/s$

PARA LA VELOCIDAD UTILIZAMOS

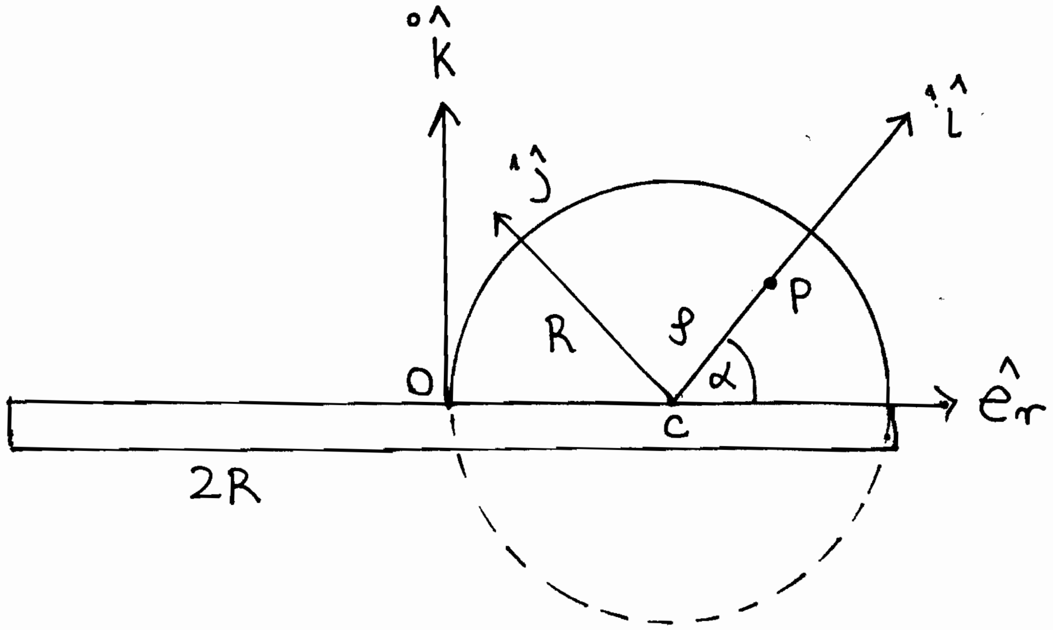
$$^0\vec{V}_P = {}^0\vec{V}_1 + {}^0\vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{r}_P + {}^1\vec{V}_P$$

$$^0\vec{V}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{loc} = \Omega\,{}^0\hat{k} \times (R\cos\phi\,{}^0\hat{i} + R\sin\phi\,{}^0\hat{j})$$

$$= \Omega R\,(-\sin\phi\,{}^0\hat{i} + \cos\phi\,{}^0\hat{j}) = \Omega R\,\hat{e}_\phi$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^0\vec{\omega}_1 = \Omega\,{}^0\hat{k} + \omega\,{}^1\hat{k} \\ {}^1\vec{r}_P = \rho\,{}^1\hat{i} \end{array}\right\} \quad {}^0\vec{\omega}_1 \times {}^1\vec{r}_P = (\Omega\,{}^0\hat{k} + \omega\,{}^1\hat{k}) \times \rho\,{}^1\hat{i}$$

$$= \Omega\rho\,({}^0\hat{k} \times {}^1\hat{i}) + \omega\rho\,{}^1\hat{j}$$



DE LA FIGURA SE OBTIENE

$$^{1}\hat{i} = \cos\alpha\,\hat{e}_r + \sin\alpha\,{}^{0}\hat{k} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\alpha \\ \sin\phi\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

LUEGO

$$^{0}\hat{k} \times \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\alpha \\ \sin\phi\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = -\sin\phi\cos\alpha\,{}^{0}\hat{i} + \cos\phi\cos\alpha\,{}^{0}\hat{j}$$

Y $$^{1}\hat{j} = -\sin\alpha\,\hat{e}_r + \cos\alpha\,{}^{0}\hat{k} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\phi \\ -\sin\alpha\sin\phi \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ASÍ

$$^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P = \Omega\rho\cos\alpha\left(-\sin\phi\,{}^{0}\hat{i} + \cos\phi\,{}^{0}\hat{j}\right) + \omega\rho\begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\phi \\ -\sin\alpha\sin\phi \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Y $\;{}^{\wedge}\vec{V}_p = V_p\,{}^{\wedge}\hat{i}$

FINALMENTE

$${}^{o}\vec{V}_P = \Omega R\,\hat{e}_\phi + \Omega\rho\cos\alpha\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} + \omega\rho\begin{pmatrix}-\sin\alpha\cos\phi\\ -\sin\alpha\sin\phi\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$+\,V_P\begin{pmatrix}\cos\phi\cos\alpha\\ \sin\phi\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

EVALUANDO

$$\Omega = 1\,\text{rad/seg},\; R = 3\,m,\; \rho = 2\,m$$
$$\alpha = 30°,\; \phi = 15°,\; V_P = 1\,m/s$$

$${}^{o}\vec{V}_P = \begin{pmatrix}-0.776457 - 0.448287 - \omega 0.965926 + 0.836516\\ 2.897777 + 1.673032 - \omega 0.258819 + 0.224144\\ \omega 1.732050 + 0.5\end{pmatrix}$$

$${}^{o}\vec{V}_P = \begin{pmatrix}-0.388228 - 0.965926\,\omega\\ 4.794953 - 0.258819\,\omega\\ 0.5 + 1.732050\,\omega\end{pmatrix}$$

b)

PARA OBTENER LA ACELERACIÓN, USAMOS

$$ {}^{0}\vec{a}_P = {}^{0}\vec{a}_1 + {}^{0}\vec{\alpha}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P + {}^{0}\vec{\omega}_1 \times ({}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P) + {}^{1}\vec{a}_P + 2\,{}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{V}_P $$

$$ {}^{0}\vec{a}_1 = \cancel{\vec{\alpha}}^{\,0} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\big|_{OC} $$

$$ = \Omega\,{}^{0}\hat{k} \times (\Omega\,{}^{0}\hat{k} \times R\hat{e}_r) = \Omega\,{}^{0}\hat{k} \times \Omega R\,\hat{e}_\phi $$

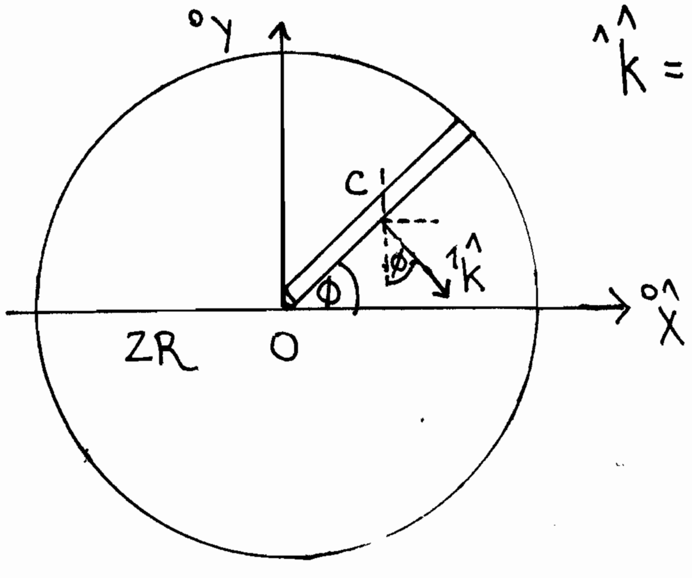
$$ = -\Omega^2 R\,\hat{e}_r \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} -2.897777 \\ -0.776457 \end{pmatrix} $$

DEL DESARROLLO ANTERIOR

$$ {}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P = \Omega \rho \cos\alpha \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \rho \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\phi \\ -\sin\alpha\sin\phi \\ \cos\alpha \end{pmatrix} $$

$$ \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} -0.4482877 - 0.965926\,\omega \\ 1.673032 - 0.258819\,\omega \\ 0.866025 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{0}\vec{\omega}_1 = \Omega\,{}^{0}\hat{k} + \omega\,{}^{1}\hat{k} $$



$$ {}^{1}\hat{k} = \sin\phi\,{}^{0}\hat{\imath} - \cos\phi\,{}^{0}\hat{\jmath} $$

$$ {}^{0}\vec{\omega}_1 \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} 0.258819\,\omega \\ -0.965925\,\omega \\ 1 \end{pmatrix} $$

$$\therefore\ {}^{0}\vec{\omega}_1 \times ({}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_p) \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} -0.577696\,\omega - 1.673032 \\ -1.19007\,\omega - 0.4482877 \\ -0.999998\,\omega^2 \end{pmatrix}$$

$${}^{0}\vec{\alpha}_1 = \frac{d}{dt}\,{}^{0}\vec{\omega}_1 = \cancel{\frac{d\Omega}{dt}}^{\,0}\,{}^{0}\hat{k} + \Omega \cancel{\frac{d\,{}^{0}\hat{k}}{dt}}^{\,0} + \cancel{\frac{d\omega}{dt}}^{\,0}\,{}^{1}\hat{k} + \omega \frac{d\,{}^{1}\hat{k}}{dt}$$

$$\frac{d\,{}^{1}\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}\,{}^{1}\hat{k} \times {}^{1}\hat{k} = \Omega\,{}^{0}\hat{k} \times {}^{1}\hat{k}$$

$$= \Omega\,{}^{0}\hat{k} \times \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$${}^{0}\vec{\alpha}_1 = \omega\Omega \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

LUEGO

$${}^{0}\vec{\alpha}_1 \times {}^{1}\vec{r}_p = \omega\Omega \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \times \rho\,{}^{1}\hat{x}$$

$$\overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} \omega\,0.965926 \\ \omega\,0.258819 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.673032 \\ 0.448287 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{0}\vec{\alpha}_1 \times {}^{1}\vec{r}_p = \begin{pmatrix} 0.258819\,\omega \\ -0.965926\,\omega \\ 0.433012\,\omega - 0.433012\,\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.258819\,\omega \\ -0.965926\,\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\,{}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{V}_P \overset{(ii)}{=} 2\begin{pmatrix} 0.258819\,\omega \\ -0.965925\,\omega \\ 1 \end{pmatrix} \times 1\cdot\begin{pmatrix} 0.836516 \\ 0.224144 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.965925\,\omega - 0.448288 \\ -0.258819\,\omega + 1.673032 \\ 0.116025\,\omega + 1.616023\,\omega \end{pmatrix}$$

Y ${}^{1}\vec{a}_P = \vec{0}$

FINALMENTE

$${}^{0}\vec{a}_P = \begin{pmatrix} -2.897777 + 0.258819\,\omega - 0.577696\,\omega - 1.673032 \\ -0.776457 - 0.965926\,\omega - 1.19007\,\omega - 0.4482877 \\ -0.999998\,\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -0.965925\,\omega - 0.448288 \\ -0.258819\,\omega + 1.673032 \\ 1.732048\,\omega \end{pmatrix}$$

$${}^{0}\vec{a}_P = \begin{pmatrix} -1.284802\,\omega - 5.019097 \\ -2.414815\,\omega + 0.4482873 \\ -0.999998\,\omega^2 + 1.732048\,\omega \end{pmatrix}$$

IMPONIENDO LA CONDICIÓN

$$\|{}^{0}\vec{a}_P\| = 10 \ \ m/s^2 \longrightarrow \begin{matrix} \omega_1 = 2.45527 \ \ rad/s \\ \omega_2 = -2.09474 \ \ rad/s \end{matrix}$$

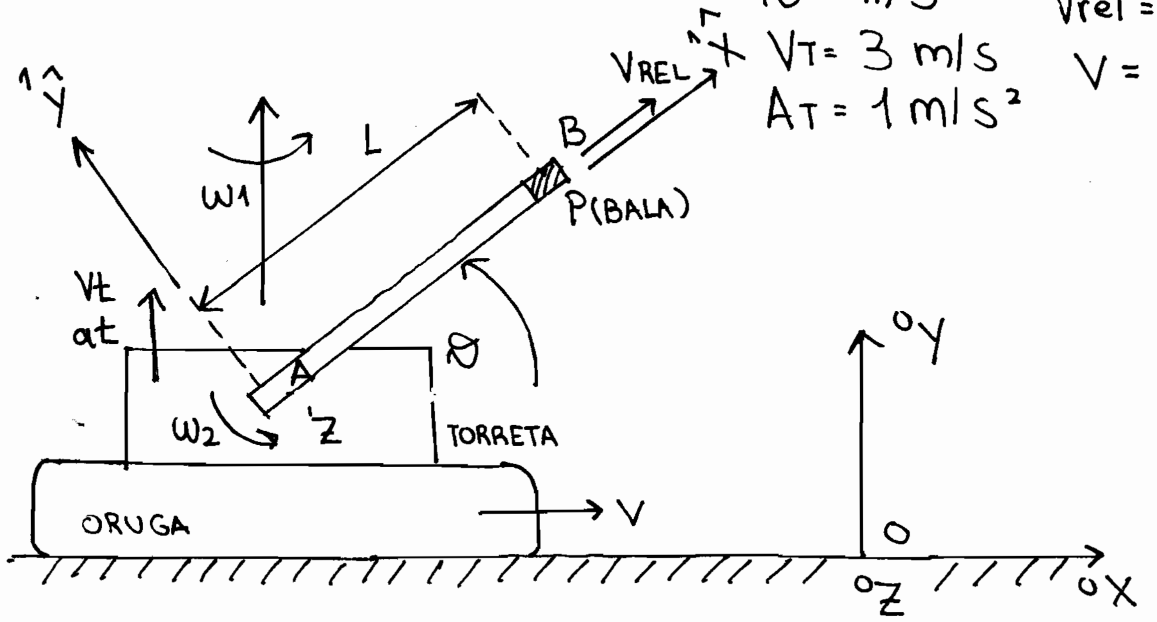
SOLUCIÓN PROBLEMA 6

$L = 2\,m$ $\qquad \omega_2 = 1\,rad/s$

$\vartheta = \pi/3$ $\qquad V_{rel} = 720\,km/hr$

$V_T = 3\,m/s$ $\qquad V = 5\,m/s$

$A_T = 1\,m/s^2$



a) $\omega_1 = 0$

DETERMINEMOS $\vec{V}_A$ Y $\vec{\omega}_{AB}$

$$\vec{V}_A = \begin{pmatrix} V \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \omega_2\,{}^1\hat{k} = 1\,{}^0\hat{k}$$

LUEGO

$$\vec{V}_A = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/CIR}$$

PARA ESTA PARTE UTILIZEMOS UN SIST. COORDENADO CON ORIGEN EN A

$$Y \quad \vec{r}_{A/CIR} = \vec{r}_A - \vec{R}_{CIR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/CIR} = \hat{k} \times \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \therefore \vec{r}_{CIR} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) $M = 100\ kg$

FORMA 1:

$$\vec{V_G} = \vec{V_A} + \vec{\omega_{AB}} \times \vec{r_{AG}}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\hat{k} \times \begin{pmatrix} L/2 \cos\vartheta \\ L/2 \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\hat{k} \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.86603 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1339746 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

LUEGO

$$K_{AB} = \frac{1}{2} M \vec{V_G}^2 + \frac{1}{2} I_{zz/G} \vec{\omega_{AB}}^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 100 \left(3.5^2 + 4.1339746^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 100\ 2^2 \cdot 1^2$$

$$= 1483{,}654\ J$$

FORMA 2

$$K_{AB} = \frac{1}{2} I_{zz/CIR} \vec{\omega_{AB}}^2$$

$$I_{zz/CIR} = I_{zz/G} + m\, \vec{r_{CIRG}}^2$$

$$\vec{r_{CIRG}} = \vec{r_G} - \vec{r_{CIR}} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \cos\vartheta \\ \frac{L}{2} \sin\vartheta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -4.133975 \end{pmatrix}$$

LUEGO

$$I_{zz/CIR} = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 2^2 + 100 \cdot \left(3.5^2 + (-4.133975)^2\right)$$

$$= 2967,30826$$

$$\therefore \quad K = \frac{1}{2} \cdot 2967,30826 \cdot 1^2 = 1483,6541 \ J$$

c) AQUÍ $\omega_1 = 3$ rad/s

DEFINIMOS

S_{r0} ESTACIONARIO, ORIGEN EN O

S_{r1} SOLIDARIO A LA TORRETA, ORIGEN EN A

UTILIZAMOS

$${}^{0}\vec{a}_p = {}^{0}\vec{a}_1 + {}^{0}\vec{\alpha}_1 \times {}^{1}\vec{r}_p + {}^{0}\vec{\omega}_1 \times ({}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_p) + 2\,{}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{V}_p + {}^{1}\vec{a}_p$$

$${}^{0}\vec{a}_1 = \vec{a}_{A/0} = A_t \ {}^{0}\hat{j} = 1\,{}^{0}\hat{j}$$

$${}^{0}\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_{AB} = \omega_1 \,{}^{0}\hat{j} + \omega_2 \,{}^{1}\hat{k} = \omega_1 \,{}^{0}\hat{j} + \omega_2 \,{}^{1}\hat{k}$$

$$= 3\,{}^{0}\hat{j} + {}^{1}\hat{k}$$

$${}^{1}\vec{r}_p = L\,{}^{1}\hat{i}$$

$${}^{1}\vec{r}_p = 2\,{}^{1}\hat{i}$$

Así, ${}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P \overset{(ii)}{=} (3\,{}^{0}\hat{j} + {}^{0}\hat{k}) \times 2(\cos\vartheta\,{}^{0}\hat{i} + \sin\vartheta\,{}^{0}\hat{j})$

$${}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P \overset{(ii)}{=} (3\,\hat{j} + \hat{k}) \times (1\,\hat{i} + 1{,}73205\,\hat{j})$$

$$= -1{,}73205\,\hat{i} + \hat{j} - 3\,\hat{k}$$

$${}^{0}\vec{\omega}_1 \times ({}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{r}_P) \overset{(ii)}{=} (3\,\hat{j} + \hat{k}) \times (-1{,}73205\,\hat{i} + \hat{j} - 3\,\hat{k})$$

$$= -10\,\hat{i} - 1.73205\,\hat{j} + 5.19615\,\hat{k}$$

ADEMÁS,

$${}^{0}\vec{\alpha}_1 = \frac{d}{dt}\,{}^{0}\vec{\omega}_1 = \overset{\vec{0}}{\cancel{\dot{w}_1}}\,{}^{0}\hat{j} + \overset{\vec{0}}{\cancel{w_1 \frac{d}{dt}\,{}^{0}\hat{j}}} + \overset{0}{\cancel{\dot{w}_2}}\,{}^{1}\hat{k} + w_2 \frac{d\,{}^{1}\hat{k}}{dt}$$

$$\text{y} \quad \frac{d}{dt}\,{}^{1}\hat{k} = {}^{0}\vec{\omega}^{1}\,\hat{k} \times {}^{1}\hat{k} = w_1\,\hat{j} \times {}^{1}\hat{k} \overset{ii}{=} w_1\,{}^{0}\hat{i}$$

$$\therefore \quad {}^{0}\vec{\alpha}_1 \overset{(ii)}{=} w_2 w_1\,{}^{0}\hat{i} = 3\,{}^{0}\hat{i}$$

$${}^{0}\vec{\alpha} \times {}^{1}\vec{r}_P \overset{(ii)}{=} 3\,{}^{0}\hat{i} \times (1\,\hat{i} + 1{,}73205\,\hat{j})$$

$$= 5{,}19615\,{}^{0}\hat{k}$$

$${}^{1}\vec{V}_P = V_{rel}\,{}^{1}\hat{i} \overset{(ii)}{=} V_{rel}(\cos\vartheta\,{}^{0}\hat{i} + \sin\vartheta\,{}^{0}\hat{j}) = 100\,{}^{0}\hat{i} + 173{,}205\,{}^{0}\hat{j}$$

$$2\,{}^{0}\vec{\omega}_1 \times {}^{1}\vec{V}_P \overset{(ii)}{=} 2(3\,{}^{0}\hat{j} + {}^{0}\hat{k}) \times (100\,{}^{0}\hat{i} + 173{,}205\,{}^{0}\hat{j})$$

$$= -346.41\,{}^{0}\hat{i} + 200\,{}^{0}\hat{j} - 600\,{}^{0}\hat{k}$$

$${}^{1}\vec{a}_P = \vec{0}$$

FINALMENTE,

$$\overset{\circ}{\vec{a}_P} \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5,19615 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -1.73205 \\ 5.19615 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -346.41 \\ 200 \\ -600 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\circ}{\vec{a}_P} \overset{(ii)}{=} \begin{pmatrix} -356.41 \\ 198.26795 \\ -589.6077 \end{pmatrix} \ m/s^2$$