Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
ICM1022 Mecánica Vectorial

Ayudantía 3

Fabián Cádiz C.
facadiz@ing.puc.cl

1. **Problema 1**
Se tiene un péndulo compuesto de una masa M en el punto P, unida al punto O mediante una cuerda ideal de largo l, como se muestra en la figura. Se aplica una fuerza perpendicular al segmento OP de magnitud F a distancia $l/3$ de la masa. Además, existe una fuerza de roce con el aire proporcional a v_M^3, donde v_M representa la velocidad (en magnitud) de la masa. Encontrar las ecuaciones de movimiento

Problema 2
La barra liviana AB está doblada en forma de L y rotulada a tierra en el punto O, resultando dos segmentos del mismo largo $L = 2$ (m). En el extremo A lleva soldada una masa puntual $m = 1$ (kg) , lo mismo para el extremo B. Los resortes que ligan a tierra las masas poseen una constante elástica $K = 2,5$ (N/m). Ambos resortes presentan su largo natural $l_o = 1$ (m) cuando el segmento AO está horizontal. El movimiento es plano
a) Calcular la frecuencia natural del sistema para pequeñas oscilaciones
b) Se suprime el resorte que liga a tierra la masa B y a ésta se aplica una fuerza horizontal de magnitud constante $F = 20$ (N). Partiendo del reposo, calcular la velocidada angular de ambas masas cuando B llega al extremo de la pared

Problema 3
Los dos bloques de la figura están en reposo sobre una superficie horizontal cuando se aplica una fuerza F al bloque B. Las masas de los bloques A y B son 5 y 10 (kg), respectivamente. El coeficiente de roce estático entre los bloques es $\mu_S = 0,4$ y el cinético $\mu_K = 0,2$. Además, el coeficiente de roce cinético entre B y la superficie horizontal es $\mu_B = 0,9$. Determinar
a) La máxima fuerza F que se puede aplicar a B antes de que los bloques dejen de moverse juntos
b) Si se aplica una fuerza 2 veces la encontrada en a), ¿cuánto logra avanzar el bloque B antes que A caiga de él? Suponga que A es mucho más pequeño que B, y que éste mide 4 (m) de largo. Las alturas de los bloques son despreciables
c) Verificar la propiedad del centro de masas

Problema 4

a) Dos partículas de masa $m = 1$ (kg) se encuentran ubicadas sobre una misma horizontal de un plano inclinado en $\alpha = 20$ con el plano horizontal. El coeficiente de roce estático entre las partículas y el plano es $\mu_S = 0,45$. Si ambas partículas se unen por un resorte de constanste elástica $k = 25$ (N/m) y largo natural $l_o = 0,1$ (m), ¿entre qué valores puede variar la distancia entre las partículas sin que se pierda el equilibrio?
b) Igual para el caso en que las partículas esten alineadas según una recta de máxima pendiente. Las masas en este caso son $m_1 = 1$ (kg) y $m_2 = 2$ (kg)

Problema 5

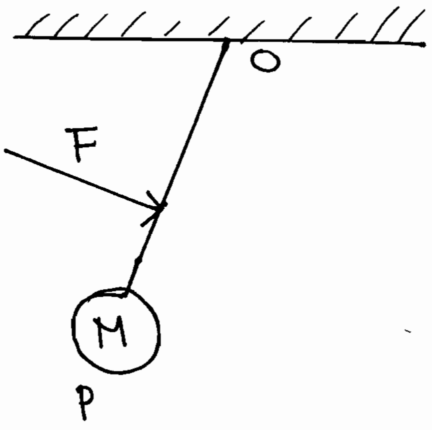
El sistema representado en la figura está formado por dos bloques A y B de masas $M_A = 2$ (kg), $M_B = 5$ (kg), donde B puede deslizar sobre una superficie horizontal (suelo), mientras A puede deslizar sobre B. El coeficiente de roce estático entre A y B es $\mu_{S,AB} = 0,9$ y el cinético $\mu_{K,AB} = 0,6$. Además, el coeficiente de roce cinético entre B y la superficie horizontal es $\mu_{K,B} = 0,8$. Un tercer bloque de masa M_C está conectado al bloque B, a través de una polea ideal y un cable ideal. Se pide determinar
a) El máximo valor de la masa M_C, de modo que los bloques A y B aún puedan moverse juntos
b) La velocidad y aceleración del centro de masas del sistema $A - B - C$, si la masa del bloque C fuese 125 (kg), y el sistema parte del reposo

Problema 6

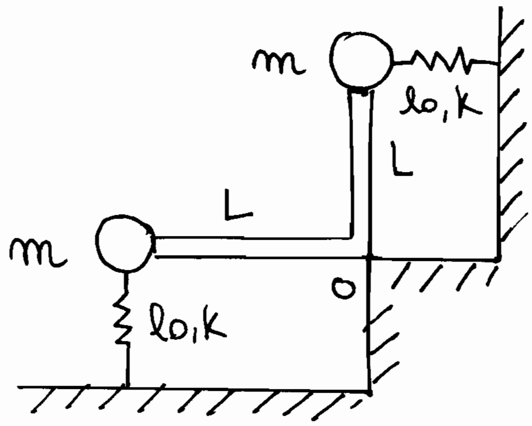
El sistema representado en la figura está compuesto por dos bloques, un cable ideal, dos poleas ideales y un resorte de constante elástica $k = 25$ (N/m) y largo natural $l_o = 0,2$ (m). El bloque A tiene masa $m_A = 1$ (kg) y puede deslizar sobre una superficie fija, inclinada un ángulo $\vartheta = \pi/6$, caracterizada por un coeficiente de roce estático con el bloque de $\mu = 0,6$. Se pide
a) Calcular el máximo valor que puede darse a la masa M_B, de tal forma que el equilibrio estático ocurra cuando el resorte está estirado en $\delta = 0,1$ (m)
b) Partiendo desde el reposo, con el resorte en su largo natural, se sustituye la masa M_B calculada en a), por una masa 2 veces mayor. Calcular el valor absoluto de la velocidad de la masa B en el instante en que ésta haya descendido $H = 1$ (m). El coeficiente de roce cinético entre el bloque A y la superficie es $\mu_k = 0,3$

Problema 7

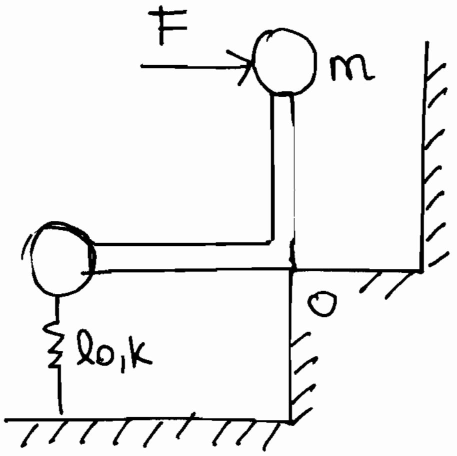
Una caja A de 1 (kg) desciende por una rampa exenta de rozamiento, y choca contra una caja B de 0,5 (kg), unida a un resorte de rigidez $k = 9000$ (N/m) . A consecuencia del choque, ambas masas quedan unidas y deslizan conjuntamente. Si la caja A parte del reposo , siendo $d = 2$ (m). Determinar
a) Velocidad de las cajas justo después del choque
b) Máxima compresión del resorte
c) Aceleración de las cajas para el instante de máxima compresión



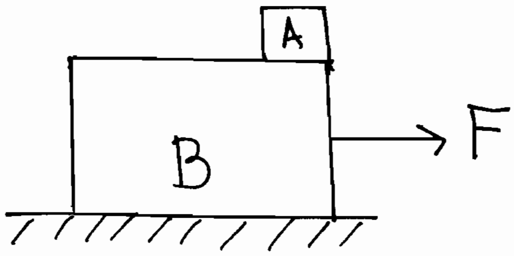
PROBLEMA 1



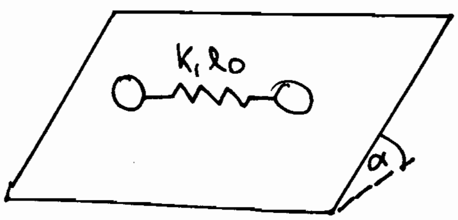
PROBLEMA 2 a)



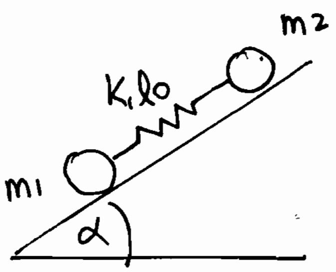
PROBLEMA 2 b)



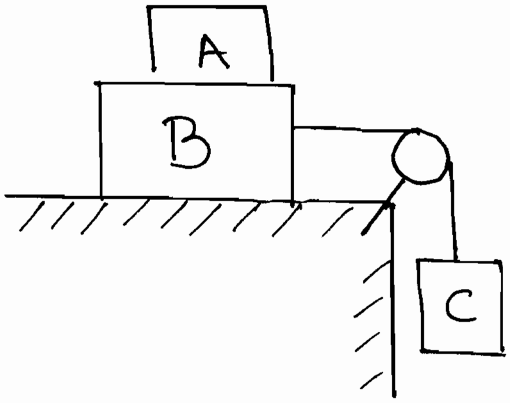
PROBLEMA 3



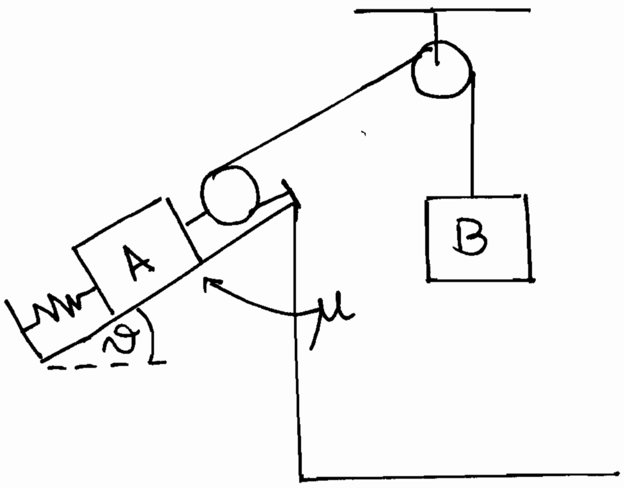
PROBLEMA 4a



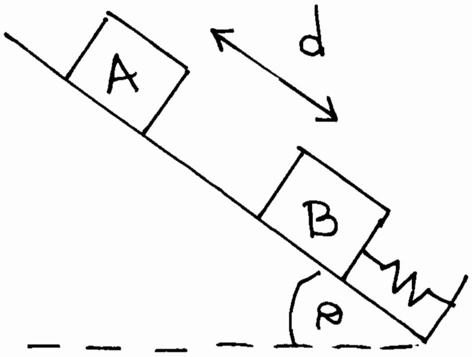
PROBLEMA 4b



PROBLEMA 5



PROBLEMA 6



PROBLEMA 7

AYUDANTÍA 3

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

2ª LEY DE NEWTON

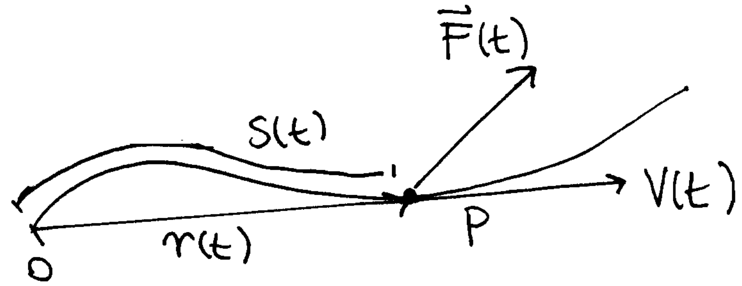
PARA UNA PARTÍCULA DE MASA CONSTANTE,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext,iP} = m\vec{a}$$

TEOREMA DEL MOVIMIENTO CINÉTICO

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{ext,iP/O} = \frac{d\vec{H}_{P/O}}{dt}$$

TRABAJO DE UNA FUERZA EXTERNA



$$W_{12} = \int_1^2 d\vec{r}(t)\cdot\vec{F}(t) = \int_1^2 ds(t)\,\hat{e}_t\cdot\vec{F}(t)$$

ENERGÍA CINÉTICA

PARA UNA PARTÍCULA DE MASA m Y VELOCIDAD $\vec{V}$

$$E_K = K = \frac{1}{2}m\vec{V}^2$$

TEOREMA DEL TRABAJO

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ext,ip} = K_2 - K_i$$

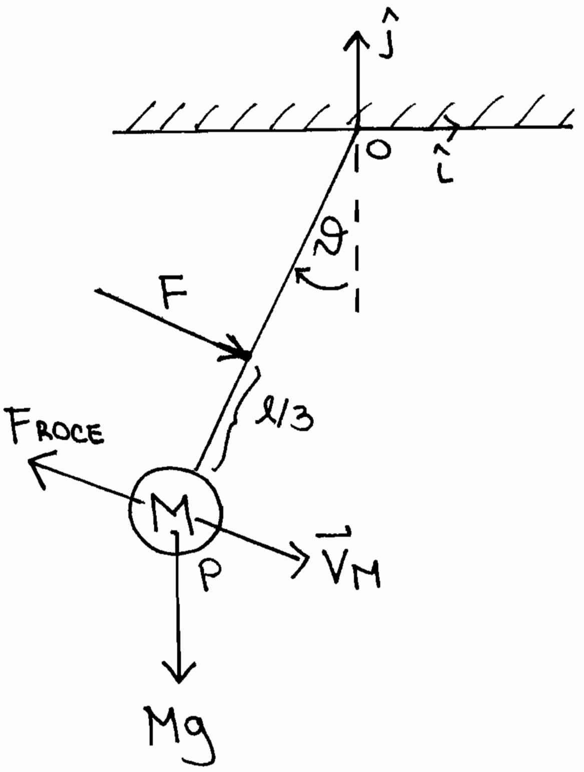
TRABAJO ENTRE 1 Y 2 DE LA FUERZA NETA SOBRE P = DIF. DE ENERGÍA CINÉTICA ENTRE 2 Y 1

SI SÓLO SE CONSIDERAN FUERZAS NO CONSERVATIVAS,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{nc,i} = E_{MEC\,2} - E_{MEC\,1}$$

$$E_{mec} = E_c + E_p$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 1



PARA ENCONTRAR LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA M, USAREMOS EL TEOREMA DEL MOVIMIENTO CINÉTICO, ESTO ES

$$\underbrace{\sum_i \vec{M}_{i/O}}_{\text{SUMA DE MOMENTOS C/R A O}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{H}_{/O}}_{\text{DERIVADA DEL MOMENTO ANGULAR C/R A O}}$$

EL MOMENTO ANGULAR ES

$$\vec{H}_{/O} = \vec{r}_{P/O} + M\,\vec{v}_{P/O}$$

AHORA,

$$\vec{r}_{P/O} = -\ell\sin\vartheta\,\hat{i} - \ell\cos\vartheta\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_{P/O} = \left(-\ell\cos\vartheta\,\hat{i} + \ell\sin\vartheta\,\hat{j}\right)\dot{\vartheta}$$

CON ESTO,

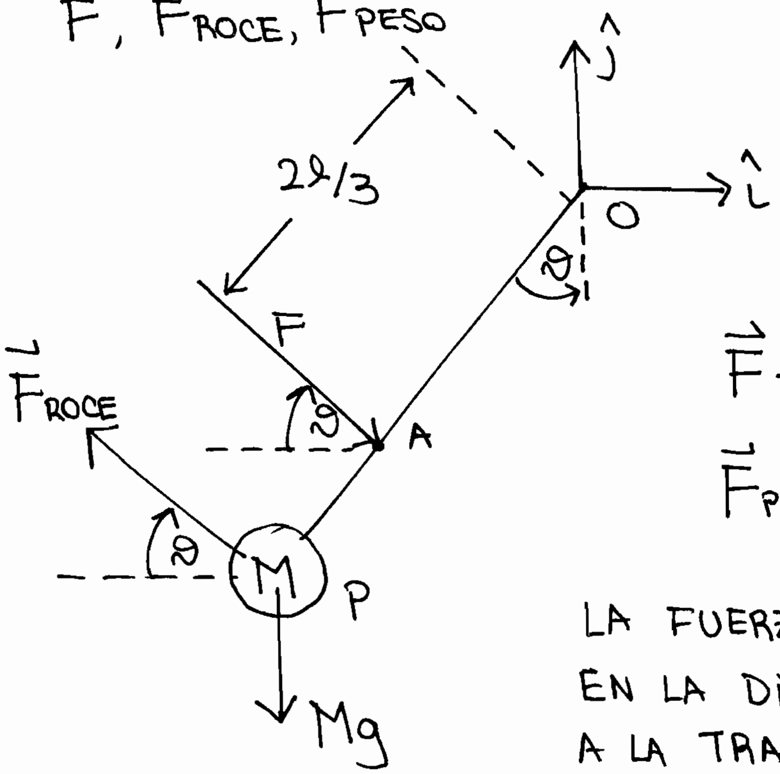
$$\vec{H}_{/O} = \left(-\ell\sin\vartheta\,\hat{i} - \ell\cos\vartheta\,\hat{j}\right) \times M\ell\dot{\vartheta}\left(-\cos\vartheta\,\hat{i} + \sin\vartheta\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{H}_{/O} = -M\ell^2\dot{\vartheta}\left\{\left(\sin\vartheta\,\hat{i} + \cos\vartheta\,\hat{j}\right) \times \left(-\cos\vartheta\,\hat{i} + \sin\vartheta\,\hat{j}\right)\right\}$$

$$\vec{H}_{/O} = -M\ell^2\dot{\vartheta}\,\hat{k}$$

SOBRE LA PARTÍCULA ACTÚAN 3 FUERZAS,

$\vec{F}$, $\vec{F}_{ROCE}$, $\vec{F}_{PESO}$



$$\vec{F} = F(\cos\vartheta\,\hat{\imath} - \sin\vartheta\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{F}_{PESO} = -Mg\,\hat{\jmath}$$

LA FUERZA DE ROCE ACTÚA EN LA DIRECCIÓN TANGENTE A LA TRAYECTORIA, LUEGO

$$\vec{F}_{ROCE} = B|v|^3\left(\frac{-\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\vec{F}_{ROCE} = Bv^2(-\vec{v})$$

ASÍ,

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{r}_{A/O} \times \vec{F} + \vec{r}_{P/O} \times (\vec{F}_{ROCE} + \vec{F}_{PESO})$$

$$= \frac{2l}{3}(-\sin\vartheta\,\hat{\imath} - \cos\vartheta\,\hat{\jmath}) \times F(\cos\vartheta\,\hat{\imath} - \sin\vartheta\,\hat{\jmath}) + \ldots$$

$$\ldots + l(-\sin\vartheta\,\hat{\imath} - \cos\vartheta\,\hat{\jmath}) \times -Mg\,\hat{\jmath}$$

$$\ldots + l(-\sin\vartheta\,\hat{\imath} - \cos\vartheta\,\hat{\jmath}) \times Bl^3\dot{\vartheta}^3(\cos\vartheta\,\hat{\imath} - \sin\vartheta\,\hat{\jmath})$$

$$\sum \vec{M}_{/O} = \frac{2l}{3}F(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)\hat{k} + Mgl\sin\vartheta\,\hat{k} + Bl^3\dot{\vartheta}^3(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)\hat{k}$$

$$\sum \vec{M}_{/O} = \left(\frac{2l}{3}F + Mgl\sin\vartheta + Bl^3\dot{\vartheta}^3 \right) \hat{k}$$

CON ESTO

$$\sum \vec{M}_{/O} = \frac{d\vec{H}_{/O}}{dt}$$

$$\left(\frac{2l}{3}F + Mgl\sin\vartheta + Bl^3\dot{\vartheta}^3 \right) \hat{k} = -Ml^2\ddot{\vartheta}\ \hat{k}$$

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO QUEDA

$$\boxed{Ml^2\ddot{\vartheta} + Mgl\sin\vartheta + Bl^3\dot{\vartheta}^3 = -\frac{2l}{3}F}$$

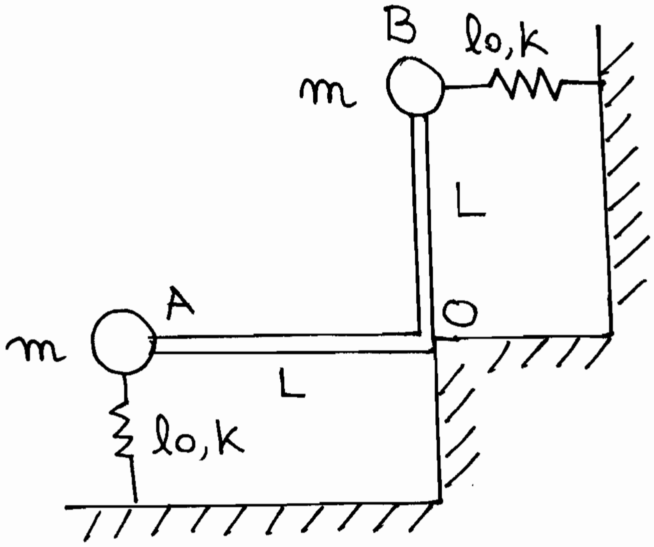
OBSERVACIÓN: DEBIDO A QUE HAY FUERZAS NO CONSERVATIVAS, NO PODRÍAMOS HABER UTILIZADO SATISFACTORIAMENTE EL TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.
AL FINAL DEL CURSO SE VERÁ OTRO MÉTODO QUE ES ÚTIL PARA TRATAR MUCHÍSIMOS PROBLEMAS, INCLUYENDO ÉSTE (MECÁNICA ANALÍTICA)

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

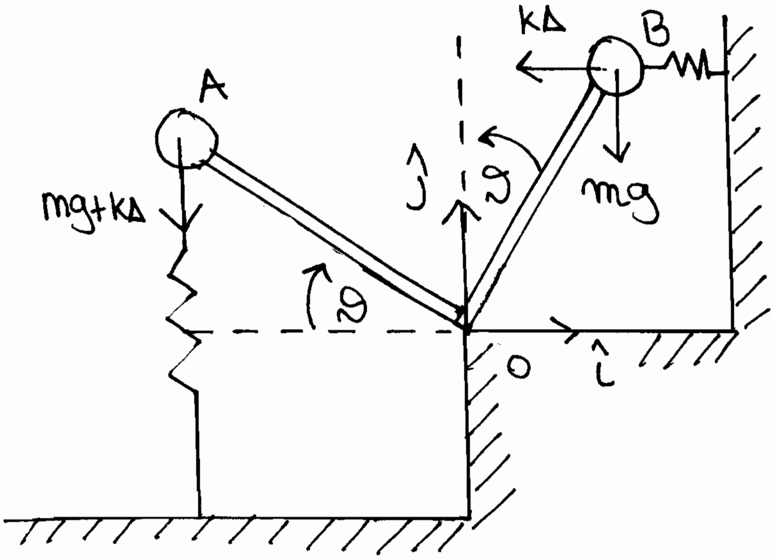
a) FORMA 1: TEOREMA DEL MOVIMIENTO CINÉTICO

SE TIENE

$m = 1$ kg
$L = 2$ m
$K = 2{,}5$ N/m
$l_0 = 1$ m



EL SISTEMA PARA UN ESTADO ARBITRARIO (CON ϑ PEQUEÑO)



$\Delta = L\sin\vartheta$

LA SUMA DE MOMENTOS CON RESPECTO AL PUNTO O,

$$\sum \vec{M}/_O = L(\sin\vartheta\,\hat{i} + \cos\vartheta\,\hat{j}) \times (-mg\,\hat{j} - kL\sin\vartheta\,\hat{i})$$
$$+ L(-\cos\vartheta\,\hat{i} + \sin\vartheta\,\hat{j}) \times (-mg\,\hat{j} - kL\sin\vartheta\,\hat{j})$$

$$\sum \vec{M}/_O = (-mgL\sin\vartheta + kL^2\sin\vartheta\cos\vartheta)\hat{k} + (mgL\cos\vartheta + kL^2\cos\vartheta\sin\vartheta)\hat{k}$$

ADEMÁS,

$$\vec{H}_{/O} = \vec{H}_{A/O} + \vec{H}_{B/O}$$

$$\vec{r}_{B/O} = L(\sin\vartheta\,\hat{i} + \cos\vartheta\,\hat{j}) \rightarrow \vec{v}_{B/O} = L\dot{\vartheta}(\cos\vartheta\,\hat{i} - \sin\vartheta\,\hat{j})$$
$$\vec{r}_{A/O} = L(-\cos\vartheta\,\hat{i} + \sin\vartheta\,\hat{j}) \rightarrow \vec{v}_{A/O} = L\dot{\vartheta}(\sin\vartheta\,\hat{i} + \cos\vartheta\,\hat{j})$$

$$\vec{H}_{A/O} = \vec{r}_{A/O} \times m\vec{v}_{A/O} = L\begin{pmatrix}-\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\end{pmatrix} \times mL\dot{\vartheta}\begin{pmatrix}\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$
$$= -L^2 m\dot{\vartheta}\,\hat{k}$$

Y $\vec{H}_{B/O} = \vec{r}_{B/O} \times m\vec{v}_{B/O} = L\begin{pmatrix}\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \times mL\dot{\vartheta}\begin{pmatrix}\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}$

$$= -L^2 m\dot{\vartheta}\,\hat{k}$$

CON ESTO

$$\vec{H}_{/O} = -2L^2 m\dot{\vartheta}\,\hat{k} \quad \text{Y} \quad \frac{d\vec{H}_{/O}}{dt} = -2L^2 m\ddot{\vartheta}\,\hat{k}$$

ENTONCES,

$$\left(mgL(\cos\vartheta - \sin\vartheta) + 2kL^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)\hat{k} = -2L^2 m\ddot{\vartheta}\,\hat{k}$$

$$2mL^2\ddot{\vartheta} + mgL\cos\vartheta - mgL\sin\vartheta + 2kL^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

PARA OSCILACIONES PEQUEÑAS

$$\sin\vartheta \approx \vartheta$$
$$\cos\vartheta \approx 1$$

ASÍ

$$2mL^2\ddot{\vartheta} + mgL - mgL\vartheta + 2kL^2\vartheta = 0$$

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{2L} - \frac{\vartheta g}{2L} + \frac{k}{m}\vartheta = 0$$

$$\ddot{\vartheta} + \vartheta\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{2L}\right) = -\frac{g}{2L}$$

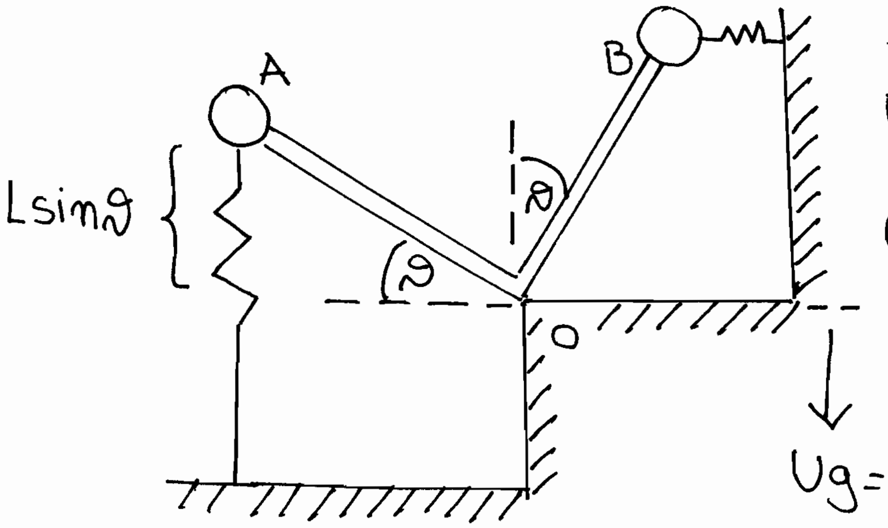
(ECUACIÓN DEL OSCILADOR ARMÓNICO)

DE AQUÍ ES INMEDIATO QUE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA ES

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2kL - gm}{2mL}}$$

EVALUANDO, $\omega_n = 0{,}218$ RAD /SEG

a) FORMA 2: CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA



EL SISTEMA PARA UN ESTADO ARBITRARIO (CON ϑ PEQUEÑO)

LA ENERGÍA MECÁNICA ES

$$E = K + U$$

DONDE

$$K = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} m V_B^2, \quad \text{CON} \quad |V_A| = |V_B| = |\dot{\vartheta}| L$$

$$K = m L^2 \dot{\vartheta}^2$$

ADEMÁS, LA ENERGÍA POTENCIAL SE DIVIDE EN DOS:

$$U_{GRAV} = mgL\sin\vartheta + mgL\cos\vartheta$$

$$U_{ELÁSTICA} = \frac{1}{2} k(-L\sin\vartheta)^2 + \frac{1}{2} k(L\sin\vartheta)^2 = kL^2\sin^2\vartheta$$

ASÍ:

$$E = mL^2\dot{\vartheta}^2 + mgL\sin\vartheta + mgL\cos\vartheta + kL^2\sin^2\vartheta$$

COMO AMBAS MASAS ESTÁN SOMETIDAS A FUERZAS CONSERVATIVAS, LA ENERGÍA ES UNA CONSTANTE DE MOVIMIENTO.

LUEGO, $\dfrac{dE}{dt} = 0$

$$\Rightarrow 2mL^2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + mgL\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} - mgL\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} + 2kL^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} = 0$$

SI $\dot{\vartheta} \neq 0$

$$2mL^2\ddot{\vartheta} + mgL(\cos\vartheta - \sin\vartheta) + 2kL^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

PARA ϑ PEQUEÑO, $\sin\vartheta \approx \vartheta$
$\cos\vartheta \approx 1$

CON ESTO

$$2mL^2\ddot{\vartheta} + mgL - mgL\vartheta + 2kL^2\vartheta = 0$$

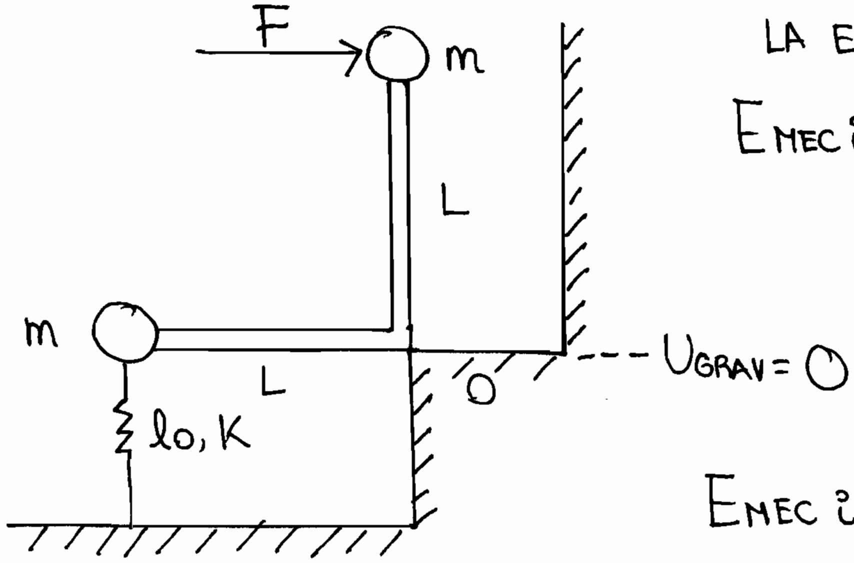
$$\ddot{\vartheta} + \vartheta\left(\frac{K2L - mg}{2mL}\right) = -\frac{g}{2R}$$

(EC. DEL OSCILADOR ARMÓNICO)

LA FRECUENCIA NATURAL ES

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2kL - mg}{2mL}} = 0{,}218 \text{ RAD / SEG}$$

b) INICIALMENTE, SE TIENE



LA ENERGÍA INICIAL ES

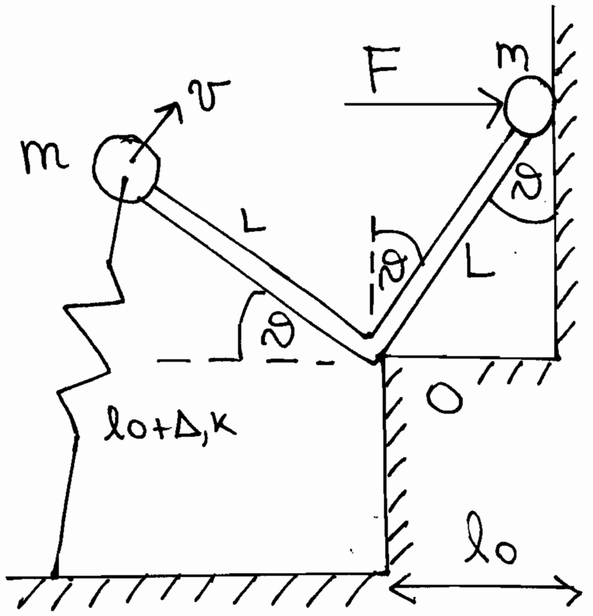
$$E_{MEC\,i} = K_i + U_i$$

$$K_i = 0 \quad (\text{REPOSO})$$

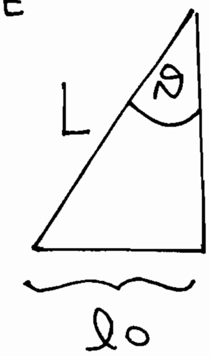
$$U_i = mgL$$

$$E_{MEC\,i} = mgL = 19{,}62 \ [J]$$

EN LA CONFIGURACIÓN FINAL SE TIENE



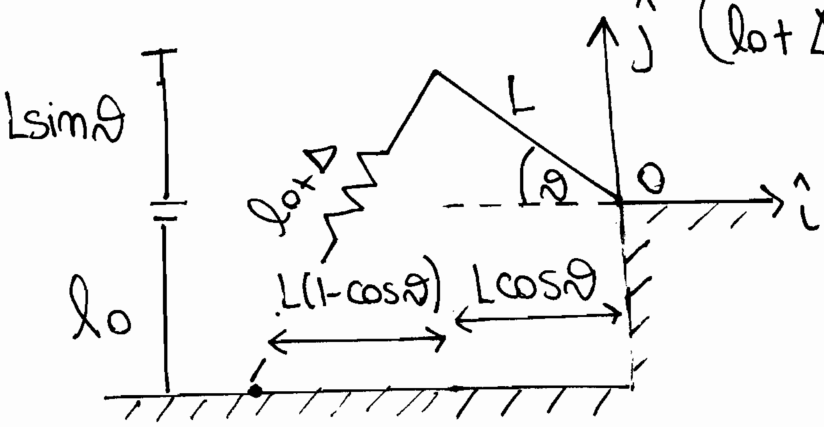
EL ÁNGULO ϑ SE OBTIENE DE



$$\vartheta = \sin^{-1}\left(\frac{l_0}{L}\right)$$

$$\vartheta = \pi/6 \text{ rad}$$

Δ SE OBTIENE DE



$$(l_0 + \Delta)^2 = (L\sin\vartheta + l_0)^2 + L^2(1-\cos\vartheta)^2$$

$$L = 2 \text{ m}, \ l_0 = 1 \text{ m}, \ \vartheta = \pi/6$$

$$\Delta = 1{,}0179 \text{ m}$$

ASÍ, LA ENERGÍA FINAL ES

$$E_{MEC\,f} = K_f + U_f$$

$$K_f = 2 \cdot \frac{1}{2} m (\dot{\vartheta} L)^2 = m L^2 \dot{\vartheta}^2$$

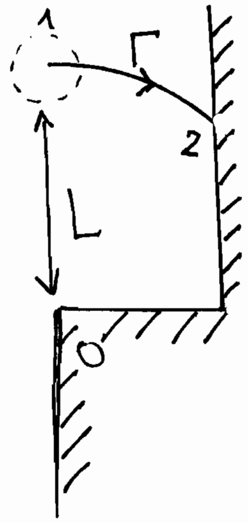
$$U_f = mgL(\cos\vartheta + \sin\vartheta) + \frac{1}{2} k \Delta^2$$

$$E_{MEC\,f} = 4\dot{\vartheta}^2 + 28{,}0965 \ [J]$$

EL TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA F ES TAL QUE

$$W_F = E_{MEC\,f} - E_{MEC\,i}$$

$$W_F = \int_\Gamma d\vec{r} \cdot \vec{F}$$



$$= \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

LA POSICIÓN DE LA MASA B C/R A O ES

$$\vec{r}_{/O} = L(\cos\vartheta\,\hat{j} + \sin\vartheta\,\hat{i})$$

LUEGO $\quad d\vec{r} = L(-\sin\vartheta\,\hat{j} + \cos\vartheta\,\hat{i})$

$$W_F = \int_{\vec{r}_{1/0}}^{\vec{r}_{2/0}} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_0^{\pi/6} d\vartheta \; L(\cos\vartheta \,\hat{i} - \sin\vartheta \,\hat{j}) \cdot F \,\hat{i}$$

$$= FL \int_0^{\pi/6} d\vartheta \cos\vartheta = FL \sin \pi/6 = 20 \; [J]$$

FINALMENTE

$$20 = 4\dot{\vartheta}^2 + 28{,}0965 - 19.62$$

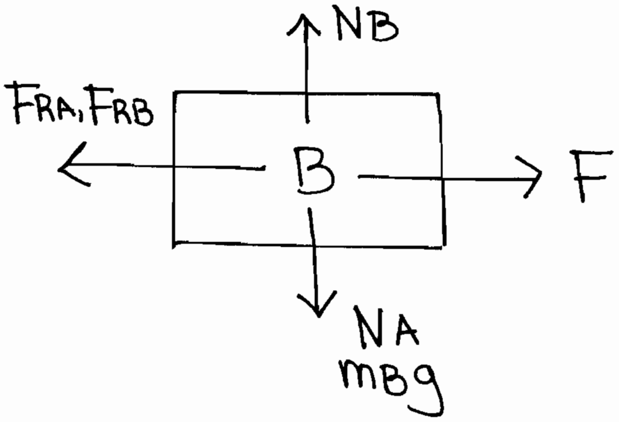
$$\dot{\vartheta}^2 = 2{,}88088$$

$$\dot{\vartheta} = 1{,}69731 \;\; \text{RAD/SEG}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 3

a) $m_A = 5\ kg$ $\mu_S = 0{,}4$
$m_B = 10\ kg$ $\mu_B = 0{,}9$
$L = 4\ m$ $\mu_K = 0{,}2$

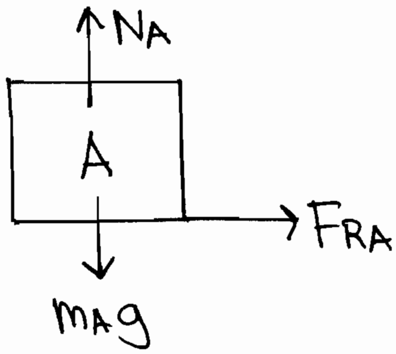
EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE PARA B



$$\sum F_x : F - F_{RA} - F_{RB} = m_B \ddot{x} \quad (1)$$

$$\sum F_y : N_B - N_A - m_B g = 0 \quad (2)$$

PARA EL BLOQUE A



$$\sum F_x : F_{RA} = m_A \ddot{x} \quad (3)$$

$$\sum F_y : N_A - mg = 0 \quad (4)$$

NOTAR QUE HEMOS IMPUESTO

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_B = \ddot{x}$$

(PARA QUE SE MUEVAN JUNTOS)

ADEMÁS, $F_{MÁX}$ ES TAL QUE F_{RA} ES MÁXIMA

$(F_{RA} \leq \mu_S N_A)$

$F_{RA} = \mu_S N_A \quad (5)$

Y $F_{RB} = \mu_B N_B \quad (6)$

$$\therefore \ F_{MAX} = 191{,}295 \ [N]$$

b) AHORA $F = 2F_{MAX} = 382,59 \ [N]$

(LOS BLOQUES DESLIZARÁN ENTRE SÍ)

PARA A:

$$\sum F_x : F_{RA} = m_A(\ddot{X}_A + \ddot{X}_B) \quad (1)$$

ACELERACIÓN ABSOLUTA C/R A UN SIST. DE REF. INERCIAL

$$\sum F_Y : N_A - m_A g = 0 \quad (2)$$

PARA B:

$$\sum F_x : F - F_{RA} - F_{RB} = m_B \ddot{X}_B \quad (3)$$

$$\sum F_Y : N_B - N_A - m_B g = 0 \quad (4)$$

ADEMÁS,

$$F_{RA} = \mu_K \cdot N_A \quad (5)$$

$$F_{RB} = \mu_B \cdot N_B \quad (6)$$

RESOLVIENDO

$N_A = 49.05 \ [N]$

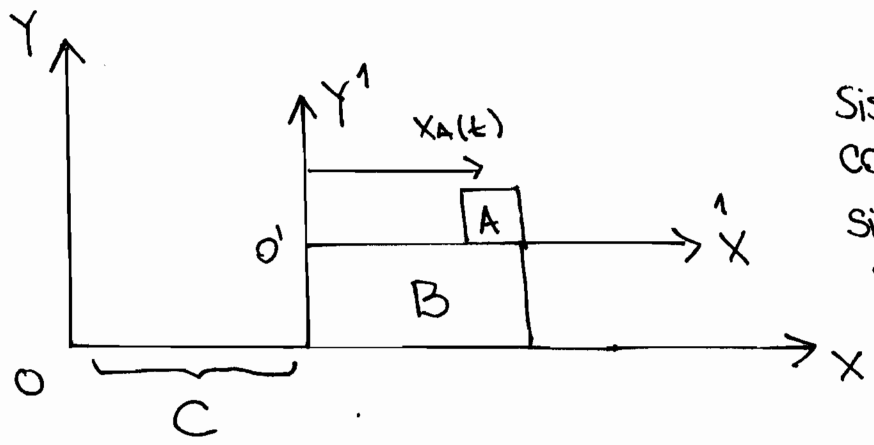
$N_B = 147,15 \ [N]$

$F_{RA} = 9,81 \ [N]$

$F_{RB} = 132,435 \ [N]$

$\ddot{X}_B = 24,0345 \ [m/s^2]$

$\ddot{X}_A = -22,0725 \ [m/s^2]$



SISTEMA X-Y-Z FIJO, CON ORIGEN EN O

SISTEMA X'-Y'-Z' SOLIDARIO AL BLOQUE B

EN EJES X'-Y'-Z'

$$\ddot{X}_A(t) = -22{,}0725$$

LUEGO

$$\dot{X}_A(t) = \int_0^t dt\, \ddot{X}_A(t) = -22{,}0725t + C_1$$

PERO $\dot{X}_A(0) = 0$
(REPOSO) $\rightarrow C_1 = 0$

$$X_A(t) = \int_0^t dt\, \dot{X}_A(t) = -11{,}03625\, t^2 + C_2$$

PERO $X_A(0) = 4 \rightarrow C_2 = 4$

$$\therefore \quad \boxed{X_A(t) = -11{,}03625\, t^2 + 4}$$

EL TIEMPO QUE DEMORA A EN LLEGAR AL OTRO EXTREMO ESTÁ DADO POR

$$X_A(t') = 0$$

$t' = 0{,}602$ SEG.
(SOLUCIÓN POSITIVA)

EN EJES ABSOLUTOS PARA B

$$\ddot{X}_B(t) = 24{,}0345$$

$$\dot{X}_B(t) = \int_0^t dt\, \ddot{X}_B(t) = 24{,}0345\, t + C_3$$

PERO $\dot{X}_B(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$$\dot{x}_B(t) = 24{,}0345\, t$$

$$x_B(t) = \int_0^t dt\, \dot{x}_B(t) = 12{,}01725\, t^2 + C_4$$

PERO $x_B(0) = C$

$\rightarrow C_4 = C$

$$\boxed{x_B(t) = 12{,}01725\, t^2 + C}$$

ASÍ, LO QUE ALCANZA A AVANZAR B ES

$$\Delta x_B = x_B(t') - x_B(0) = 12{,}01725\,(0{,}602)^2 + C - C$$

$$\Delta x_B = 4{,}355 \quad (m)$$

c) LA ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASAS ES

$$\vec{a}_{G/O} = \frac{m_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_A(t) + \ddot{x}_B(t) \\ 0 \end{pmatrix} + m_B \begin{pmatrix} \ddot{x}_B(t) \\ 0 \end{pmatrix}}{m_A + m_B} = \begin{pmatrix} 16{,}677 \\ 0 \end{pmatrix} m/s^2$$

$$\vec{v}_{G/O} = \frac{m_A \begin{pmatrix} \dot{x}_A(t) + \dot{x}_B(t) \\ 0 \end{pmatrix} + m_A \begin{pmatrix} \dot{x}_B(t) \\ 0 \end{pmatrix}}{m_A + m_B} = \begin{pmatrix} 16{,}677\, t \\ 0 \end{pmatrix} m/s$$

$$\vec{r}_{G/O} = \frac{m_A \begin{pmatrix} x_A(t) + x_B(t) \\ 0 \end{pmatrix} + m_B \begin{pmatrix} x_B(t) \\ 0 \end{pmatrix}}{m_A + m_B}$$

$$\vec{r}_{G/O} = \frac{5\begin{pmatrix}0{,}981t^2+4+C\\0\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}12{,}01725t^2+C\\0\end{pmatrix}}{15}$$

$$= \begin{pmatrix}8{,}3385t^2+1{,}333+C\\0\end{pmatrix}$$

ADEMÁS,

$$\vec{r}_{A/O} = \vec{r}_{G/O} + \vec{r}_{A/G} \rightarrow \vec{r}_{A/G} = \vec{r}_{A/O} - \vec{r}_{G/O} = \begin{pmatrix}-7{,}3575t^2+2{,}667\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{G/O} + \vec{r}_{B/G} \rightarrow \vec{r}_{B/G} = \vec{r}_{B/O} - \vec{r}_{G/O} = \begin{pmatrix}3{,}67875t^2-1{,}333\\0\end{pmatrix}$$

ANÁLOGAMENTE

$$\vec{V}_{A/G} = \vec{V}_{A/O} - \vec{V}_{G/O} = \begin{pmatrix}-14{,}715t\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{B/G} = \vec{V}_{B/O} - \vec{V}_{G/O} = \begin{pmatrix}7{,}3575t\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{A/G} = \vec{a}_{A/O} - \vec{a}_{G/O} = \begin{pmatrix}-14{,}715\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{B/G} = \vec{a}_{B/O} - \vec{a}_{G/O} = \begin{pmatrix}7{,}3575\\0\end{pmatrix}$$

LUEGO

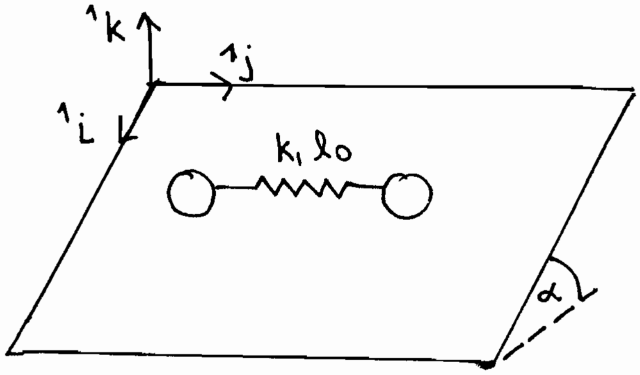
$$\vec{r}_{G/G} = \frac{m_A\,\vec{r}_{A/G} + m_B\,\vec{r}_{B/G}}{m_A+m_B} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{G/G} = \frac{m_A \vec{V}_{A/G} + m_B \vec{V}_{B/G}}{m_A + m_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{G/G} = \frac{m_A \vec{a}_{A/G} + m_B \vec{a}_{B/G}}{m_A + m_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 4

a)



$m = 1\ kg$

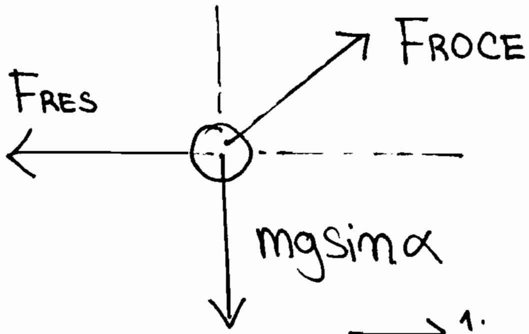
$K = 25\ N/m$

$l_0 = 0{,}1\ m$

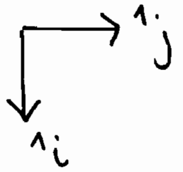
$\mu_s = 0{,}45$

$\alpha = 20°$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE PARA LA MASA m



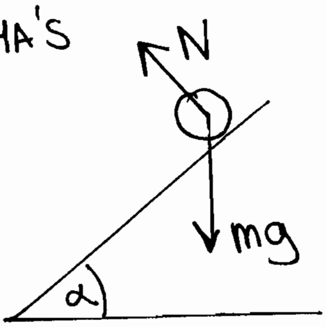
PARA QUE EXISTA EQUILIBRIO



$$|\vec{F}_{ROCE}| = |\vec{F}_{RES} + mg\sin\alpha\,\hat{i}\,|$$

$$F_{ROCE}^2 = F_{RES}^2 + (mg\sin\alpha)^2$$

ADEMÁS



SEGÚN $\hat{k}$:

$$N - mg\cos\alpha = 0$$

$$N = mg\cos\alpha$$

EN EL CASO ESTÁTICO LÍMITE

$$|\vec{F}_{ROCE}| = |\mu_s N| = |\mu_s mg\cos\alpha|$$

CON ESTO

$$(\mu_K mg\cos\alpha)^2 = (k(l-l_0))^2 + (mg\sin\alpha)^2$$

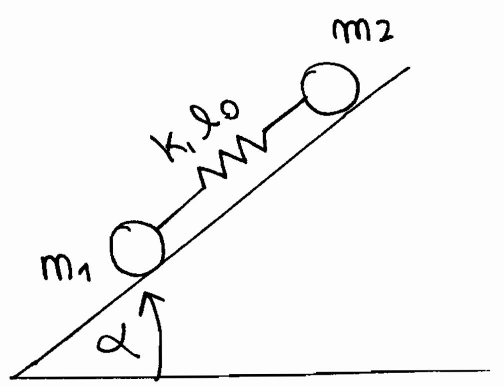
SE OBTIENE

$$\pm 2{,}4394 = k(l-l_0)$$

$$\pm 0{,}097576 = l - 0{,}1 \quad \begin{cases} l_1 = 0{,}19757 \\ l_2 = 0{,}002424 \end{cases}$$

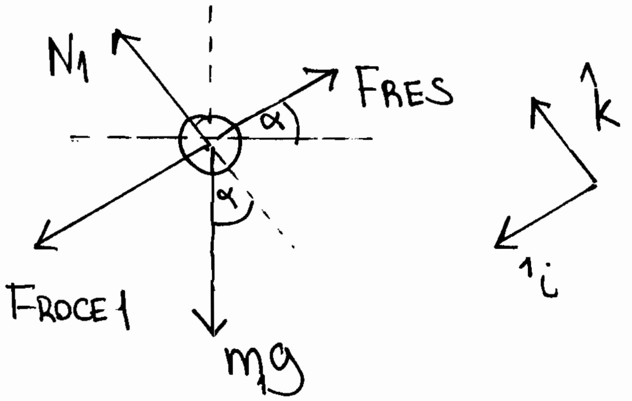
$$\therefore \quad 0{,}002424 < l < 0{,}19757 \quad (m)$$

b)



$m_1 = 1$ kg
$m_2 = 2$ kg
$k = 25$ N/m
$l_0 = 0{,}1$ m
$\alpha = 20°$

EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE PARA m1 ES



SE TIENE,

$$N_1 = m_1 g\cos\alpha \quad (1)$$

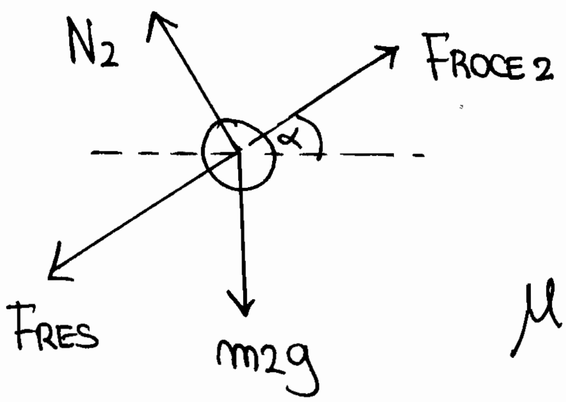
$$F_{ROCE\,1} + m_1 g\sin\alpha = F_{RES}$$

$$\underbrace{\mu_S N_1}_{\text{CASO LÍMITE}} = k(l-l_0) - m_1 g\sin\alpha \quad (2)$$

DIVIDIENDO (2) / (1)

$$\mu s = \frac{k(l-l_0) - m_1 g \sin\alpha}{m_1 g \cos\alpha} \quad (3)$$

EL DCL PARA LA MASA m2



$$N_2 = m_2 g \cos\alpha \ (4)$$

$$F_{RES} = m_2 g \sin\alpha + F_{ROCE\,2}$$

$$\mu s N_2 = k(l-l_0) + m_2 g \sin\alpha \ (5)$$

CASO LÍMITE

DIVIDIENDO (5) / (4)

$$\mu s = \frac{k(l-l_0) + m_2 g \sin\alpha}{m_2 g \cos\alpha} \quad (6)$$

DE (3) y (6)

$$m_1 g \cos\alpha \{k(l-l_0) + m_2 g \sin\alpha\} = m_2 g \cos\alpha \{k(l-l_0) - m_1 g \sin\alpha\}$$

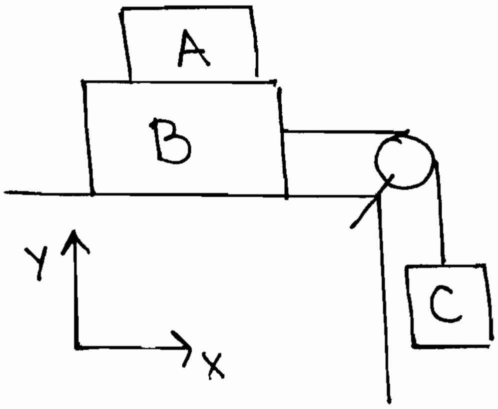
$$230,4596\,(l-0,1) + 61,8594 = 460,91923(l-l_0) - 61,8594$$

$$230,4596\,(l-0,1) = 123,7188$$

$$l - 0,1 = 0,53684$$

$$0 \leq l \leq 0,63684 \quad (m)$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 5



$m_A = 2\ kg$

$m_B = 5\ kg$

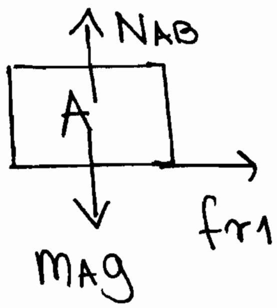
$m_C = ?$

$\mu_{S,AB} = 0,9$

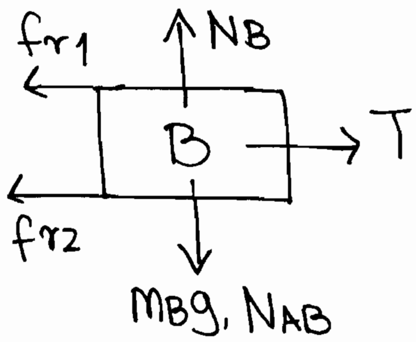
$\mu_{K,AB} = 0,6$

$\mu_{KB} = 0,8$

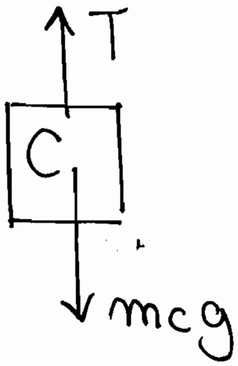
DCL PARA A



DCL PARA B



DCL PARA C



PARA A:

x: $f_{r1} = m_A \ddot{x}_A$

y: $N_{AB} = m_A g$

PARA B:

x: $T - f_{r1} - f_{r2} = m_B \ddot{x}_B$

y: $N_B - N_{AB} - m_B g = 0$

PARA C

y: $T - m_C g = m_C \ddot{y}_C$

COMO A Y B SE MUEVEN JUNTOS, $\ddot{x}_A = \ddot{x}_B$

Y ADEMÁS, EN EL CASO ESTÁTICO LÍMITE

$$f_{r1} = \mu_{S,AB} N_{AB} \rightsquigarrow f_{r1} = 17,658\ [N]$$

Y $$f_{r2} = \mu_{KB} N_B \rightsquigarrow f_{r2} = 54,936$$

ADEMÁS, POR LIGADURA $\ddot{y}_C = -\ddot{X}_B$

CON ESTO

$$\ddot{X}_A = \ddot{X}_B = 8{,}829 \quad m/s^2$$

$$T = 116{,}739 \quad N$$

Y SE OBTIENE

$$T - m_C g = -m_C \ddot{X}_B \rightarrow m_C = \frac{T}{g - \ddot{X}_B} = 119 \text{ kg}$$

b) AQUÍ, $m_C = 125$ kg

POR LO QUE EXISTIRÁ MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE A Y B

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

PARA A:

$x: f_{r1} = m_A \ddot{X}_A \ (1)$ ACELERACIÓN ABSOLUTA DE A

$y: N_{AB} - m_A g = 0$

PARA B:

$x: T - f_{r1} - f_{r2} = m_B \ddot{X}_B \ (2)$

$y: N_B - N_{AB} - m_B g = 0$

PARA C:

$y: T - m_C g = m_C \ddot{y}_C \ (3)$

SE TIENE

$$f_{r1} = \mu_{KAB} \cdot N_{AB} = 11{,}772 \text{ [N]}$$

$$f_{r2} = \mu_{KB} \cdot N_B = 54{,}936 \text{ [N]}$$

AL IGUAL QUE EN a), $\ddot{y}_C = -\ddot{x}_B$

LUEGO

$$m_C g - T = m_C \ddot{x}_B$$

DE (2) Y (3):

$$\ddot{x}_B = 8{,}91955 \ m/s^2$$
$$\ddot{x}_A = 5{,}886 \ m/s^2$$

$$\rightarrow \ \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = -3{,}03355 \ \hat{i} \ \ m/s^2$$

FINALMENTE,

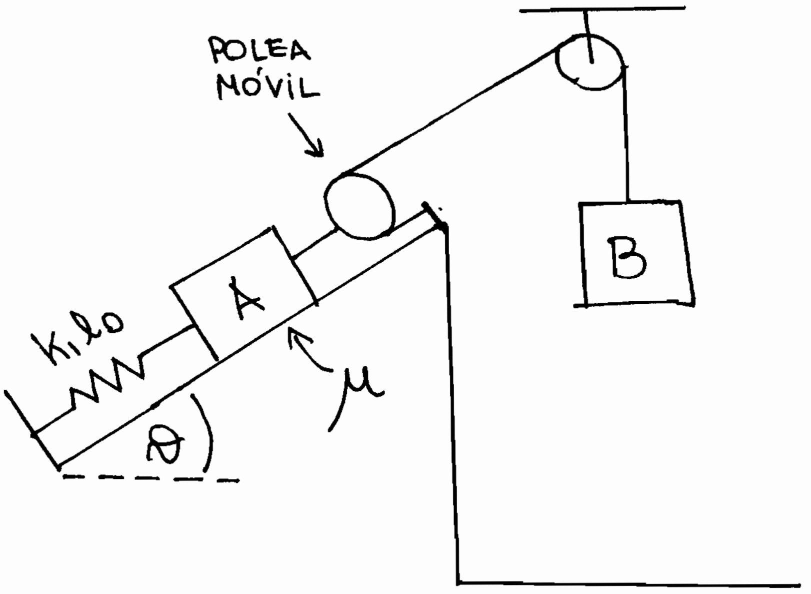
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{2\begin{pmatrix}5{,}886\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}8{,}91955\\0\end{pmatrix} + 125\begin{pmatrix}0\\-8{,}9155\end{pmatrix}}{132}$$

$$\vec{a}_{CM} = \begin{pmatrix}0{,}427\\-8{,}4465\end{pmatrix} \ m/s^2$$

Y COMO EL SISTEMA PARTE DEL REPOSO

$$\vec{v}_{CM} = \begin{pmatrix}0{,}427\,t\\-8{,}4465\,t\end{pmatrix} \ m/s$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 6



$m_A = 1\,kg$

$\theta = \pi/6\ rad$

$\mu = 0{,}4$

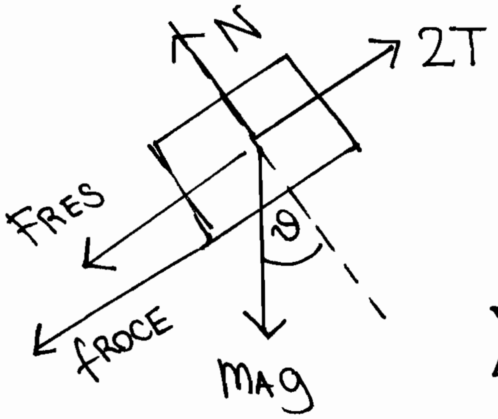
$K = 25\ N/m$

$l_0 = 0{,}2\ m$

$\delta = 0{,}1\ m$

$\mu_K = 0{,}3$

a) EL DCL PARA A:



$$\sum F_x: 2T - m_A g \sin\theta - f_{RES} - f_{ROCE} = 0$$

$$2T - 1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 - 25 \cdot 0{,}1 - 0{,}4\,N$$

CASO LÍMITE

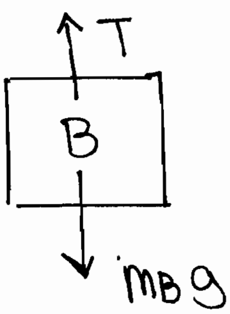
$$\sum F_y: N - m_A g \cos\theta = 0$$

$$N = 1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}866 = 8{,}4955$$

$$2T - 10{,}8032 = 0$$

$$T = 5{,}4016$$

PARA B



$$\sum F_y: T - m_B g = 0$$

$$m_B = T/g = 0{,}55062\ kg$$

b) AHORA $m_B = 2 \cdot 0{,}55062 = 1{,}10124$ kg

$h = 1$ (m)

LA ENERGÍA MECÁNICA INICIAL ES:

$$E_{MEC\,i} = K_i + U_i$$

$$\left.\begin{array}{l} K_i = 0 \quad \text{(REPOSO)} \\ U_i = U_{gi} + U_{ki} \\ U_{gi} = \text{CTE } 1 + \text{CTE } 2 \\ U_{ki} = \frac{1}{2} k \Delta l_i^2 = 0 \end{array}\right\} E_{MEC\,i} = \text{CTE } 1 + \text{CTE } 2$$

POR OTRO LADO,

$$K_f = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$$

POR RAZÓN DE LIGADURA

$$|\Delta Y_b| = 2|\Delta X_a| \longrightarrow |V_B| = 2|V_A|$$

$$\therefore\ K_f = 0{,}5 \cdot \frac{V_B^2}{4} + 0{,}5 \cdot 1{,}10124\, V_B^2$$

$$= 0{,}67562\, V_B^2 \quad \text{J}$$

$$U_f = U_{Gf} + U_{Kf}$$

$$U_{gf} = CTE\,1 + m_A g \cdot \underbrace{0{,}5 \cdot 1}_{\Delta X_A} \cdot \sin 30° + CTE\,2 - m_B g \underbrace{h}_{\Delta Y_B = 1}$$

$$= CTE1 + CTE\,2 - 8{,}35 \quad J$$

Y.
$$U_{Kf} = \frac{1}{2} K \Delta \ell^2 = 0{,}5 \cdot 25 \cdot (\underbrace{0{,}5 \cdot 1}_{\Delta X_A})^2 = 3{,}125 \quad J$$

$$E_{MECf} = CTE1 + CTE\,2 - 5{,}225 + 0{,}67562\, V_B^{\,2}.$$

EL TRABAJO DE LA FUERZA DE ROCE ES
($\vec{f}_{ROCE}$ = CTE , Y TRAYECTORIA DE A ES RECTA)

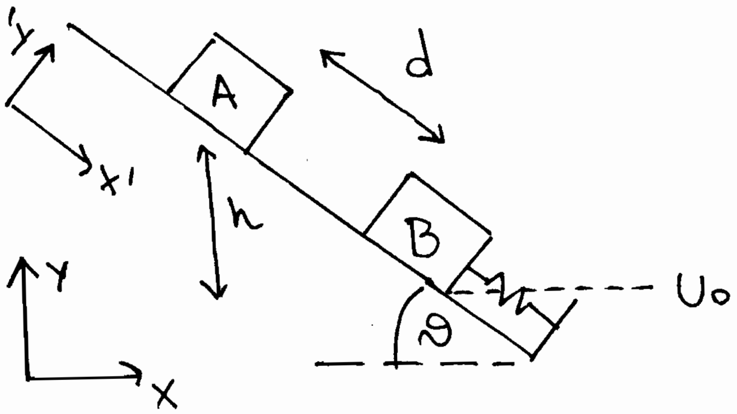
$$W_{FROCE} = -(\underbrace{0{,}3 \cdot 1 \cdot 9{,}81 \cdot \cos\theta}_{\mu_K \cdot N}) \cdot \underbrace{0{,}5}_{\Delta X_A}$$

$$= -1{,}27436 \quad J$$

$$E_{MECF} - E_{MECi} = W_{FROCE} = -1{,}27436 = 0{,}67562 V_B^2 - 5{,}225$$

$$V_B \Big|_{h=1(m)} = 2{,}41815 \ m/s$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 7



$d = 2\,m$

$\theta = 30°$

$m_A = 1\,kg$

$m_B = 0,5\,kg$

$k = 9000\,N/m$

a) POR CONSERVACIÓN DE ENERGÍA, JUSTO ANTES DEL IMPACTO

$$\underbrace{m_A g h}_{E_{iA}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_A |V_{Ai}|^2}_{E_{fA}}$$

$$9{,}81 \cdot 2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} |V_{Ai}|^2$$

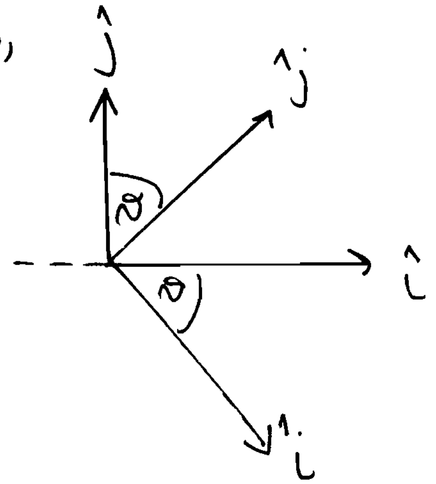
$$V_{Ai} = 4{,}42944 \quad m/s^2$$

PARA EL IMPACTO, USAMOS LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM LINEAL EN LA DIRECCIÓN $'\hat{i}$

$$m_A V_{Ai} = (m_A + m_B) V_f$$

$$V_f = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right) V_{Ai} = 2{,}95296\ m/s$$

ADEMÁS,



$$\hat{i}' = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}$$

ASÍ,

$$\vec{V_f} = V_f\,\hat{i}'$$

$$\vec{V_f} = V_f \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}55733 \\ -1{,}47648 \end{pmatrix} m/s$$

b) SUPONGAMOS QUE EL RESORTE SE COMPRIME UNA DISTANCIA x

POR CONSERVACIÓN DE ENERGÍA,

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)\,V_f^2 = -(m_A + m_B)\,g\,h(x) + \frac{1}{2}kx^2$$

$(K = 0)$ MÁX COMPRESIÓN

DONDE $h(x) = x\sin\theta = 0{,}5\,x$

ASÍ

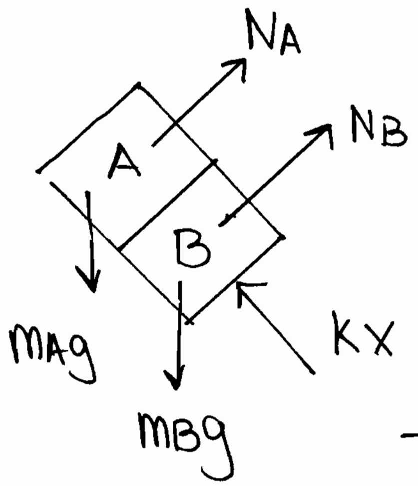
$$26{,}1599 + 7{,}3575\,x = \frac{1}{2}kx^2 = 4500\,x^2$$

$$4500\,x^2 - 7{,}3575\,x - 26{,}1599 = 0$$

$x_1 = -0{,}075432\ m$ (SIN SENTIDO)

$x_2 = 0{,}07707\ m$

c) DCL:



$$\sum F_i \rightarrow -kx + (m_A + m_B) g \sin\theta = (m_A + m_B)\ddot{x}$$

$$-693{,}63 + 7{,}3575 = 1{,}5\,\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -457{,}515 \quad m/s^2$$

Así,

$$\vec{a}\Big|_{\substack{\text{MÁX}\\\text{COMPR.}}} = \ddot{x}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-396{,}219\\ 228{,}7575\end{pmatrix} m/s^2$$