Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería

Teoría Electromagnética

Ayudantía 5

0.1. Líneas de Transmisión

Un problema técnico interesante en Ingeniería es el de la conexión entre dos objetos, de forma que energía electromagnética pueda ser transmitida entre ellos de forma eficiente. En circuitos de baja frecuencia la conexión se realiza mediante cables. Sin embargo, este método no funciona muy bien a altas frecuencias debido a que los circuitos radiarían energía en todo el espacio, y es difícil controlar la propagación de la energía (no es bien **guiada**). En este capítulo veremos como interconectar objetos a radiofrecuencias, inferiores a los 3 GHz .

Las líneas de transmisión comunes que van de una torre a otra irradian parte de su energía, pero a frecuencias bajas (60 Hertz en Chile) esta pérdida de energía no es demasiado seria. La radiación puede evitarse al rodear la linea con un tubo metálico, pero este método no sería nada de práctico para líneas de transmisión por que los voltajes y corrientes utilizados requerirían tubos realmente largos, caros y pesados. De forma que simplemente se utilizan lineas abiertas

A frecuencias más altas, (por sobre los kHz), el tema de la radiación se vuelve intolerable, debido a que se pierde mucha potencia en forma de radiación o bien por que se inducen corrientes y voltajes en otros circuitos donde no se desean. Para frecuencias desde unos pocos kHz hasta algunos Mhz, las señales electromagnéticas y su energía son transmitidas típicamente mediante líneas que consisten de dos conductores y un medio dieléctrico entre ellos (típico ejemplo es el cable coaxial)

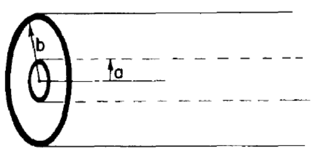


Figura 1: Una línea de transmisión coaxial

El ejemplo de la línea coaxial es el más ilustre, la cual se usa mucho para conectar componentes RF. Los cables de alambres paralelos no se usan para microondas pues no están protegidos e irradian mucho, pero sí se utilizan para conectar antenas a la televisión. Las lineas de microstrip son utilizadas en circuitos integrados de alta frecuencia. Las guías de onda rectangulares son utilizadas para transmitir grandes potencias de microondas de frecuencia superior a 3 GHz. La fibra óptica opera a frecuencias ópticas e infrarojas.

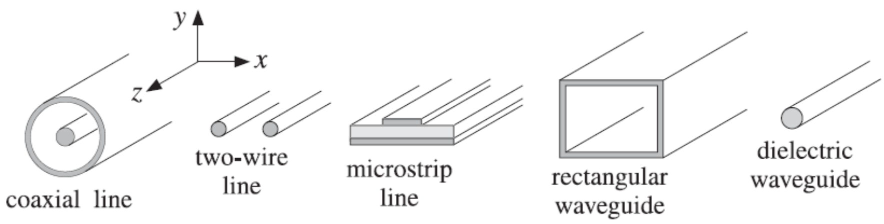
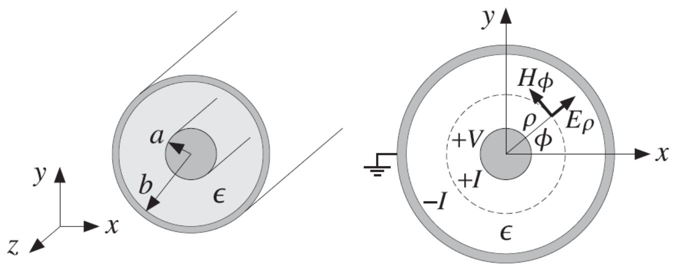


Figura 2: Distintos tipos de líneas de transmisión

Lo que vamos a desarrollar a continuación vale para cualquier línea que consta de dos conductores paralelos de cualquier forma. Aquí vamos a considerar efectos que no son estudiados en el análisis ordinario de circuitos, que son apreciables a altas frecuencias. Imaginemos que se aplica una diferencia de potencial entre dos conductores. Debido a que el dieléctrico intermedio no es perfecto (posee una cierta conductividad), existirán corrientes en el dieléctrico y esto se traduce en pérdidas a lo largo de la línea. Además, los conductores en sí tampoco son perfectos y poseen una cierta resistencia, lo que también genera pérdidas. Más aún, cuando los voltajes y corrientes varían en el tiempo, entre los conductores de una línea ocurren fenómenos capacitivos e inductivos, que más notorios serán a medida que aumenta la frecuencia. Una forma de modelar este comportamiento es ver una línea de transmisión como la unión de muchos segmentos infinitesimales, cada uno de ellos caracterizado por ciertos parámetros. Estos son: Capacitancia por unidad de largo, Inductancia por unidad de largo, y resistencia por unidad de largo (tanto la del dieléctrico como la de los conductores). A estos parámetros por unidad de largo les llamaremos **parámetros distribuídos**, y asumiremos que son constantes a lo largo de la línea (la línea es entonces homogénea)

0.2. Parámetros distribuídos de algunas líneas

0.2.1. Línea coaxial, radio interno a, radio externo b, espesor externo t



Capacidad

$$C = \frac{2\pi\epsilon_d}{\ln(b/a)}(F/m)$$

Inductancia (externa)

$$L_e = \frac{\mu_d \ln(b/a)}{2\pi}(H/m)$$

Resistencia DC (para frecuencias menores a 10 kHz)

$$R_d = \frac{1}{\sigma_c \pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{t(b+t)}\right)(\Omega/m)$$

Resistencia AC (útil para operación sobre los 10 kHz)

$$R_a = \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), t >> \delta$$

Inductancia (interna)

$$L_i = \begin{cases} R_a/2\pi f(H/m) & \text{para} f > 10kHz \\ \frac{\mu_0}{4\pi}(H/m) & \text{para} f < 10kHz \end{cases}$$

Conductancia

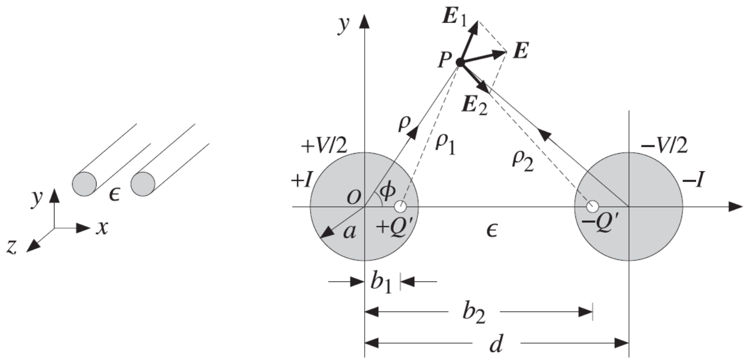
$$G = \frac{C}{\epsilon_d}\sigma_d(S/m)$$

Inductancia total

$$L_t = L_i + L_e(H/m)$$

donde ϵ_d permitividad del dieléctrico
μ_d permeabilidad del dieléctrico
σ_c= conductividad de los conductores
σ_d= conductividad del dieléctrico
$\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}}$ profundidad de penetración del conductor

0.2.2. Alambres Paralelos (radio a, separación d)



Capacidad

$$C = \frac{\pi\epsilon_d}{Arccosh\,(d/2a)}(F/m) \approx \frac{\pi\epsilon_d}{\ln(d/a)}(F/m), d >> a$$

Inductancia (externa)

$$L_e = \frac{\mu_d Arccosh\,(d/2a)}{\pi}(H/m) \approx \frac{\mu_d \ln(d/a)}{\pi}(H/m), d >> a$$

Resistencia DC (para frecuencias menores a 10 kHz)

$$R_d = \frac{1}{\sigma_c\pi}\frac{2}{a^2}(\Omega/m)$$

Resistencia AC (útil para operación sobre los 10 kHz)

$$R_a = \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}\frac{2}{a}(\Omega/m)$$

Inductancia (interna)

$$L_i = \begin{Bmatrix} R_a/2\pi f(H/m) & \text{para} f > 10kHz \\ \frac{\mu_0}{4\pi}(H/m) & \text{para} f < 10kHz \end{Bmatrix}$$

Conductancia

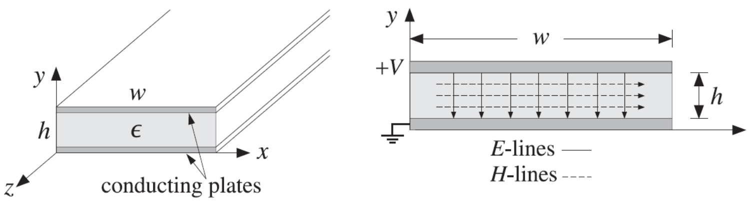
$$G = \frac{C}{\epsilon_d}\sigma_d(S/m)$$

Inductancia total

$$L_t = L_i + L_e(H/m)$$

ϵ_d permitividad del dieléctrico
μ_d permeabilidad del dieléctrico
σ_c= conductividad de los conductores
σ_d= conductividad del dieléctrico
$\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}}$ profundidad de penetración del conductor

0.2.3. Placas paralelas(ancho w, espesor t, separación d)



Capacidad

$$C = \frac{w\epsilon_d}{d}(F/m)$$

Inductancia (externa)

$$L_e = \frac{\mu_d d}{w}(H/m)$$

Resistencia DC (para frecuencias menores a 10 kHz)

$$R_d = \frac{2}{\sigma_c w t}(\Omega/m)$$

Resistencia AC (útil para operación sobre los 10 kHz)

$$R_a = \frac{1}{\sigma_c \delta}\frac{2}{w}(\Omega/m)$$

Inductancia (interna)

$$L_i = \begin{Bmatrix} R_a/2\pi f(H/m) & \text{para} f > 10kHz \\ \frac{\mu_0}{4\pi}(H/m) & \text{para} f < 10kHz \end{Bmatrix}$$

Conductancia

$$G = \frac{C}{\epsilon_d}\sigma_d(S/m)$$

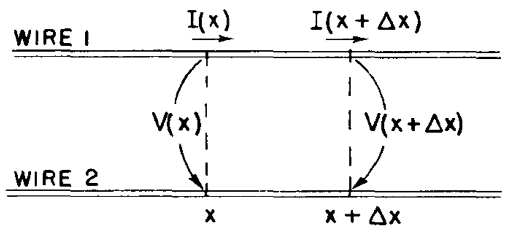
Inductancia total

$$L_t = L_i + L_e(H/m)$$

ϵ_d permitividad del dieléctrico
μ_d permeabilidad del dieléctrico
σ_c= conductividad de los conductores
σ_d= conductividad del dieléctrico
$\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}}$ profundidad de penetración del conductor

0.3. Líneas sin pérdidas

Si la línea de transmisión es sin pérdidas , es decir, tanto la resistencia como la conductancia por unidad de largo son despreciables, veremos que su comportamiento estará enteramente descrito por un único parámetro llamado **impedancia característica**. Consideremos una línea que consiste de dos conductores paralelos, representada por el circuito de la figura



Interesa ver que ocurre entre dos puntos cercanos x y $x + \Delta x$ en la línea de transmisión. Sean C_0 y L_0 la capacitancia e inductancia por unidad de largo de esta línea (Recordar que supondremos que son parámetros constantes). Sea la diferencia de potencial entre ambos conductores $V(x)$, y la corriente que fluye en dicho punto como $I(x)$. Si la corriente en la línea varía en el tiempo, la inductancia será responsable de una diferencia de potencial entre los extremos de una pequeña sección de la línea desde x a $x + \Delta x$

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0 \Delta x \frac{\partial I}{\partial t}$$

tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

un cambio de corriente en el tiempo da origen a un gradiente de voltaje. Por otra parte, si el voltaje en x está cambiando en el tiempo, debe haber una diferencia en la carga acumulada por la capacitancia. Si nuevamente tomamos una pequeña sección de línea entre x y $x + \Delta x$, la carga almacenada en esta sección será

$$q = C_0 \Delta x V$$

la razón de cambio de la carga estará dada por

$$\frac{dq}{dt} = C_0 \Delta x \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

pero sólo puede haber un cambio de la carga en x si la corriente $I(x)$ es diferente de $I(x+\Delta x)$

$$I(x) - I(x + \Delta x) = C_0 \Delta x \frac{\partial V}{\partial t}$$

Nuevamente tomando el límite cuando Δx tiende a cero

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

de forma que la conservación de la carga implica que existe un gradiente de corriente en la línea siempre que haya una variación temporal del voltaje. Las ecuaciones básicas para la línea de transmisión son entonces

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$
$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

Éstas ecuaciones se pueden desacoplar de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = -L_0 \left(\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t \partial x} \right)$$
$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t \partial x} = -C_0 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}$$

Multiplicando la segunda por L_0 y sumándola a la primera se obtiene

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - C_0 L_0 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

del mismo modo

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} - C_0 L_0 \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Se reconoce inmediatamente que tanto el voltaje como la corriente satisfacen la **ecuación de onda** en una dimensión. La conclusión es entonces, que para una línea de transmisión homogénea (C_0 y L_0) sin pérdidas, el voltaje y la corriente se propagan a través de la línea como una onda. El voltaje en la línea debe ser de la forma $V(x,t) = f(x - vt)$ o $V(x,t) = g(x + vt)$, o una combinación de ambas (la ecuación de onda es lineal). La velocidad a la cual se propaga en esta línea es

$$v = \frac{1}{\sqrt{C_0 L_0}}$$

Se puede verificar a partir de los parámetros distribuídos entregados que

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_d \epsilon_d}} = c$$

Es decir, la velocidad de propagación del voltaje y la corriente en la línea es igual a la velocidad de la luz en el dieléctrico. Ahora, escribiremos las soluciones de la forma

$$V(x,t) = v_{inc}(t - \sqrt{LC}x) + v_{ref}(t + \sqrt{LC}x)$$
$$I(x,t) = i_{inc}(t - \sqrt{LC}x) + i_{ref}(t + \sqrt{LC}x)$$

Es decir, dentro de la línea pueden existir ondas incidentes y reflejadas. Además, debe cumplirse

$$-L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$$

luego

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{L}\left\{-\sqrt{LC}\frac{\partial}{\partial u}v_{inc}(u) + \sqrt{LC}\frac{\partial}{\partial u}v_{ref}(u)\right\}$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\partial}{\partial u}v_{inc}(u) - \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\partial}{\partial u}v_{ref}(u) = \frac{\partial I(u)}{\partial u}$$

Así

$$I(u) = \sqrt{\frac{C}{L}}v_{inc}(u) - \sqrt{\frac{C}{L}}v_{ref}(u)$$

Finalmente

$$I(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L/C}}v_{inc}(t - \sqrt{LC}x) - \frac{1}{\sqrt{L/C}}v_{ref}(t + \sqrt{LC}x)$$

Se define la **impedancia característica** Z_0 de la línea como

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\Omega$$

de forma que

$$I(x,t) = \frac{1}{Z_0}v_{inc}(t - \sqrt{LC}x) + -\frac{1}{Z_0}v_{ref}(t + \sqrt{LC}x) = i_{inc}(t - \sqrt{LC}x) + i_{ref}(t + \sqrt{LC}x)$$

De aquí se obtienen las siguientes relaciones

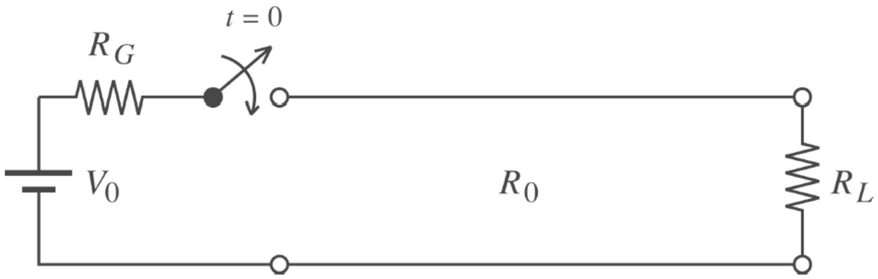
$$i_{inc}(x,t) = \frac{v_{inc}(x,t)}{Z_0}$$

$$i_{ref}(x,t) = -\frac{v_{ref}(x,t)}{Z_0}$$

Nota

Para líneas sin pérdidas, la impedancia característica está determinada por un número real. Algunos valores típicos son 50 y 75 Ω para un cable coaxial común, unos 100 Ω para un par trenzado y cerca de 300 Ω para un par de cobre usado en radiocomunicaciones

0.4. Régimen transistorio en líneas sin pérdidas y cargas resistivas



Consideremos la línea de transmisión sin pérdidas de la figura, cuya impedancia característica es $Z_0 = R_0$. En $x = 0$ se encuentra un interruptor, el cual es cerrado en $t = 0$. En el extremo derecho se aprecia una carga resistiva R_L conectada a la línea. A partir de la fuente V_0 se propagarán un voltaje y una corriente hacia la carga resistiva. Inicialmente se tiene

$$v_{in}(0, 0+) = \frac{V_0 R_0}{R_0 + R_G} = V_1(V)$$

La corriente incidente en ese instante está dada por

$$i_{in}(0, 0+) = \frac{v_{in}(0, 0+)}{Z_0} = \frac{v_{in}(0, 0+)}{Z_0} = \frac{V_0}{R_G + R_0} = I_1(A)$$

Tanto el voltaje como la corriente se propagaran en forma de ondas hacia la carga, con velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

de forma que alcanzan al extremo de la carga en un tiempo igual a

$$\tau = \frac{l}{v}$$

donde l es el largo de la línea. En ese instante, el voltaje incidente es $v_{inc}(l, \tau) = V^+$, y además se generará un voltaje reflejado, $V^- = v_{ref}(l, \tau)$. Así, el voltaje en la carga será la superposición de ambos

$$V_L = V^+ + V^-$$

Lo mismo ocurre para la corriente

$$I_L = \frac{1}{R_0}\left(V^+ - V^-\right)$$

y debe cumplirse que

$$R_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V^+ + V^-}{\frac{1}{R_0}\left(V^+ - V^-\right)}$$

Definimos el **coeficiente de reflexión** en la carga Γ_L como

$$\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+}$$

´de forma que

$$R_L = R_0 \frac{1+\Gamma_L}{(1-\Gamma_L)}$$

y se obtiene

$$\Gamma_L = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$$

Es decir, habrá un voltaje reflejado en la resistencia siempre y cuando $R_L \neq R_0$.

Con esto, el voltaje en la carga en $t = \tau$ está dado por

$$V_L(\tau) = V(l,\tau) = \frac{V_0 R_0}{R_G + R_0}(1+\Gamma_L)$$

y la corriente

$$I_L(\tau) = I(l,\tau) = \frac{V_0}{R_G + R_0}(1-\Gamma_L)$$

La intensidad de las ondas reflejadas en la carga en $\tau+$ están dadas por

$$V_2 = V_1\Gamma_L = V_1\Gamma_L = \frac{V_0 R_0}{R_G + R_0}\Gamma_L$$

$$I_2 = V_1\Gamma_L = -I_1\Gamma_L = -\frac{V_0}{R_G + R_0}\Gamma_L$$

Estas ondas alcanzarán al extremo transmisor en $t = 2\tau$, y en $t = 2\tau+$ se reflejarán en el transmisor. Definiendo

$$\Gamma_G = \frac{R_G - R_0}{R_G + R_0}$$

$$V_3 = \Gamma_L \Gamma_G V_1 = \Gamma_G V_2$$

$$I_3 = \Gamma_L \Gamma_G I_1 = -\Gamma_G I_2$$

Y así ocurrirán sucesivas reflexiones en ambos extremos de la línea. Notar que los coeficientes de reflexión son menores que uno, de forma que las ondas reflejadas después de un cierto tiempo son prácticamente nulas, y se alcanza un estado de régimen permanente **Nota**

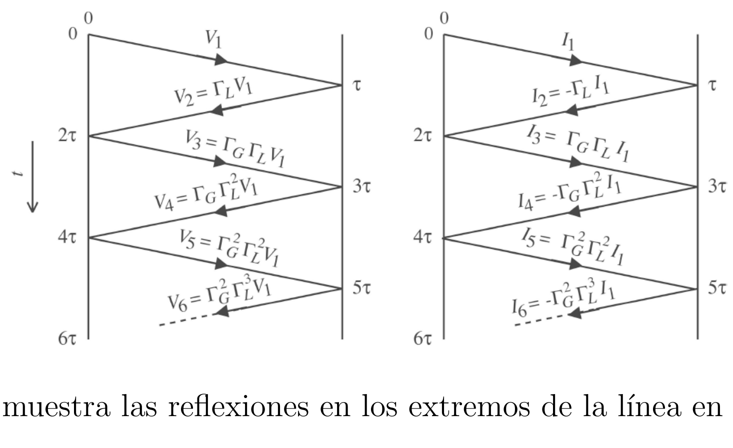


Figura 3: La figura muestra las reflexiones en los extremos de la línea en función del tiempo

Cuando se envía potencia a través de una línea de transmisión, lo más deseable es que toda esa potencia enviada sea transmitida a la carga, sin que exista potencia reflejada hacia la fuente. A partir del análisis recién visto, se aprecia que esta condición ideal se logra haciendo que la impedanca de fuente y carga sean cada una iguales a Z_0 (la impedancia característica de la línea), caso en el cual se dice que la línea de transmisión está **adaptada**

Problema

Una línea de transmisión sin pérdidas de 90 Ω, con $\epsilon_r = 2{,}78$, se conecta en $t = 0$ a una fuente contínua de 70 V, que tiene una resistencia interna de 120 Ω. Si la línea es de 135 metros, encuentre el tiempo necesario para que el voltaje en el extremo abierto de la línea (carga) sea el 97 % del valor alcanzado en estado de régimen. ¿Cuándo llega a ser el 99.8 % del valor de régimen permanente?

Solución

La velocidad de propagación en la línea está dada por la velocidad de la luz en el dieléctrico

$$v = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} = 1{,}79928 \times 10^8$$

El tiempo que demora una señal en recorrer el largo total de la línea es, entonces

$$\tau = \frac{L}{v}$$

donde $L = 135\ m$. Evaluando

$$\tau = 7{,}503 \times 10^{-7} s$$

El voltaje que se alcanza en régimen permanente en el extremo de la linea es igual a 70 Volts (circuito abierto). El 97 % de este voltaje es

$$V_{97} = 0{,}97 \times 70 = 67{,}9$$

El coeficiente de reflexión en la carga está dado por

$$\Gamma_L =_{R_L \to \infty} \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = 1$$

donde Z_0 es la impedancia característica de la línea, $Z_0 = 90\ \Omega$. El coeficiente de reflexión en el generador es

$$\Gamma_G = \frac{R_G - Z_0}{R_G + Z_0} = 0{,}142857$$

En el extremo del generador, al momento de la conexión ($t = 0$) se tiene un voltaje

$$V_{i1} = \frac{V_G Z_0}{Z_0 + R_G} = 30$$

En $t = \tau$ se refleja un voltaje en la carga dado por

$$V_{r1} = V_{i1}\Gamma_L = 30$$

En ese instante, el voltaje total en la carga alcanza un valor de

$$V_{carga,\tau} = V_{i1} + V_{r1} = 60$$

En $t = 2\tau$ se refleja un voltaje en el generador

$$V_{i2} = V_{i1}\Gamma_L\Gamma_G = 4{,}28571$$

En $t = 3\tau^-$ este voltaje alcanza la carga. Con esto, el voltaje total en la carga en ese instante es de

$$V_{carga,3\tau^-} = V_{i1} + V_{r1} + V_{i2} = 64{,}26571$$

En $t = 3\tau^+$ este voltaje es reflejado en la carga. Así, el voltaje total en la carga en ese instante es de

$$V_{carga,3\tau^+} = V_{i1} + V_{r1} + V_{i2} + V_{r2} = 68{,}5714$$

el cual es mayor al solicitado. El tiempo que tarda entonces es $3\tau = 2{,}2509 \times 10^{-6}$ segundos.

Ahora, el 99,95 % del Voltaje en régimen permanente es

$$V_2 = 70 \times 0{,}9995 = 69{,}965$$

En $t = 4\tau$ se refleja un voltaje en el generador dado por

$$V_{i3} = V_{i1}\Gamma_L^2\Gamma_G^2 = 0{,}612245$$

En $t = 5\tau$ este voltaje alcanza a la carga y es reflejado

$$V_{r3} = V_{i1}\Gamma_L^3\Gamma_G^2 = 0{,}612245$$

En este instante el voltaje en la carga es

$$V_{carga,5\tau^+} = V_{i1} + V_{r1} + V_{i2} + V_{r2} + V_{i3} + V_{r3} = 69{,}79589$$

En $t = 6\tau$ es reflejado un voltaje en el generador

$$V_{i4} = V_{i1}\Gamma_L^3\Gamma_G^3 = 0{,}0874636$$

En $t = 7\tau^-$ este voltaje llega a la carga, y entonces

$$V_{carga,7\tau^-} = V_{i1} + V_{r1} + V_{i2} + V_{r2} + V_{i3} + V_{r3} + V_{i4} = 69{,}88335$$

Es decir, en $t = 7\tau = 5{,}2521 \times 10^{-6}$ el voltaje en la carga ya ha alcanzado un 99,8 % de su valor de régimen

Problema

Una línea de transmisión sin pérdidas de 60 metros de largo, con $Z_0 = 50\ \Omega$ y velocidad de fase $2 \times 10^8\ m/s$ está terminada con un cortocircuito. La línea se conecta en $t = 0$ a una fuente de 30 V cuya resistencia interna es de 25Ω. Dibuje el voltaje en el extremo transmisor desde $t = 0$ hasta el tiempo en que el voltaje cae bajo los $0,1$ V

Solución

En $t = 0$, en el extremo del generador se tendrá un voltaje inicial de

$$V_{i1} = \frac{30Z_0}{R_G + Z_0} = \frac{30 \times 50}{75} = 20V$$

Este voltaje se propagará hacia el extremo derecho y lo alcanzará en un tiempo igual a

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{60}{2 \times 10^8} = 30 \times 10^{-8} s$$

Veamos los coeficientes de reflexión. En la carga es

$$\Gamma_L = \frac{0 - 50}{0 + 50} = -1$$

Es decir, todo es reflejado con un cambio de fase. En el generador

$$\Gamma_G = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -0{,}333$$

En $t = \tau$ es reflejado un voltaje igual a

$$V_{r1} = -20 = V_{i1}\Gamma_L$$

En $t = 2\tau$, es reflejado un voltaje nuevamente hacia la carga dado por

$$V_{i2} = V_{i1}\Gamma_L\Gamma_G = 6{,}66$$

Y el voltaje total en el extremo transmisor es

$$V_{t,2\tau} = V_{i1} + V_{r1} + V_{i2} = 6{,}66V$$

Así, en $t = 3\tau$, se produce una reflexión en la carga

$$V_{r2} = V_{i2}\Gamma_L = -6{,}66$$

En $t = 4\tau$ este voltaje vuelve al extremo transmisor y es parcialmente reflejado

$$V_{i3} = V_{r2}\Gamma_G = 2{,}21778 = V_{t,3\tau}$$

Del mismo modo, en $t = 6\tau$, se tendrá en el extremo transmisor

$$V_{i4} = -2{,}21778 \times -0{,}333 = 0{,}73852$$

y en $t = 8\tau$

$$V_{i5} = -0{,}73852 \times -0{,}333 = 0{,}24592$$

y en $t = 10\tau$

$$V_{i6} = -0{,}24592 \times -0{,}333 = 0{,}08189V$$

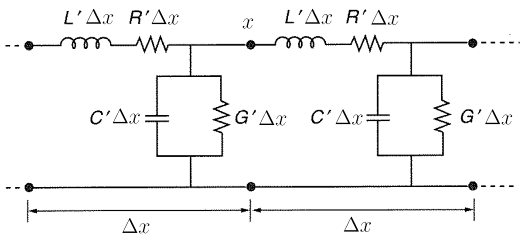
Finalmente, la secuencia es la siguiente

$$V_t = 20V, 0 < t < 2\tau$$
$$V_t = 6{,}66V, 2\tau < t < 4\tau$$
$$V_t = 2{,}2178V, 4\tau < t < 6\tau$$
$$V_t = 0{,}738V, 6\tau < t < 8\tau$$
$$V_t = 0{,}24592V, 8\tau < t < 10\tau$$
$$V_t = 0{,}08189V, 10\tau < t < 12\tau$$

El voltaje en el extremo transmisor ha caído a menos de 0,1 V en $t = 10\tau$

0.5. Líneas con pérdidas

Consideremos ahora un caso más general, en donde se consideran las pérdidas resistivas en la línea y el dieléctrico. En la siguiente figura se muestra un circuito equivalente para este caso



La diferencia de voltaje entre x y $x + \Delta x$ es

$$V(x + \Delta x) - V(x) = -R\Delta x I(x,t) - L\Delta x \frac{\partial I(t,x)}{\partial t}$$

En el límite cuando $\Delta x \to 0$, se tiene

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = -RI(x,t) - L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

De la misma forma, se tiene para la corriente

$$I(x + \Delta x) - I(x) = -G\Delta x V(x,t) - C\Delta x \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

En el límite cuando $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -GV(x,t) - C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

En resumen, el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado para $V(x,t)$ e $I(x,t)$ es

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} &= -RI(x,t) - L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} &= -GV(x,t) - C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Derivando la primera con respecto a x

$$\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} = -R\frac{\partial}{\partial x}I(x,t) - L\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t \partial x}$$

Derivando la segunda con respecto a t

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} = -G\frac{\partial}{\partial t}V(x,t) - C\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}$$

Reemplazando en la primera

$$\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} = -R\frac{\partial}{\partial x}I(x,t) + LG\frac{\partial}{\partial t}V(x,t) + LC\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} = RGV(x,t) + RC\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + LG\frac{\partial}{\partial t}V(x,t) + LC\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} &= RGV(x,t) + (RC+LG)\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial x^2} &= RGI(x,t) + (RC+LG)\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} = RGV(x,t) + (RC+LG)\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}$$

Procediendo de forma similar, es posible demostrar que la corriente satisface exactamente la misma ecuación, es decir

0.6. Caso Sinusoidal

Las ecuaciones generales de la línea de transmisión pueden ser resueltas de forma sencilla si existe una dependencia armónica en el tiempo. Al igual que en el caso de ondas electromagnéticas monocromáticas, buscaremos soluciones de la forma

$$V(x,t) = V(x)e^{iwt}$$
$$I(x,t) = I(x)e^{iwt}$$

donde, por supuesto, los voltajes y corrientes físicos corresponden a la parte real de estas magnitudes. De esta forma

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = iwV(x)e^{-iwt}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = \left(RG + iw\,(RC+LG) - w^2 LC\right)V(x)$$

Las ecuaciones para la línea de transmisión quedan de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = (R+iwL)\,(G+iwC)\,V(x) = \gamma^2 V(x)$$

$$\frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = (R+iwL)\,(G+iwC)\,I(x) = \gamma^2 I(x)$$

Se definen

$$Z = (R+iwL)$$
$$Y = (G+iwC)$$

así

$$\gamma = \sqrt{Z}\sqrt{Y}$$

Las soluciones están dadas por

$$V(x) = V^{+}e^{-\sqrt{ZY}x} + V^{-}e^{\sqrt{ZY}x}$$

$$I(x) = I^{+}e^{-\sqrt{ZY}x} + I^{-}e^{\sqrt{ZY}x}$$

Además, debe cumplirse

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\left(R + iwL\right) I(x) = -ZI(x)$$

$$I(x) = -\frac{1}{Z}\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{1}{Z}\frac{d}{dx}\left(V^{+}e^{-\sqrt{ZY}x} + V^{-}e^{\sqrt{ZY}x}\right)$$

$$I(x) = \frac{\sqrt{ZY}}{Z}\left(V^{+}e^{-\sqrt{ZY}x} - V^{-}e^{\sqrt{ZY}x}\right)$$

Es decir

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\left(V^{+}e^{-\sqrt{ZY}x} - V^{-}e^{\sqrt{ZY}x}\right)$$

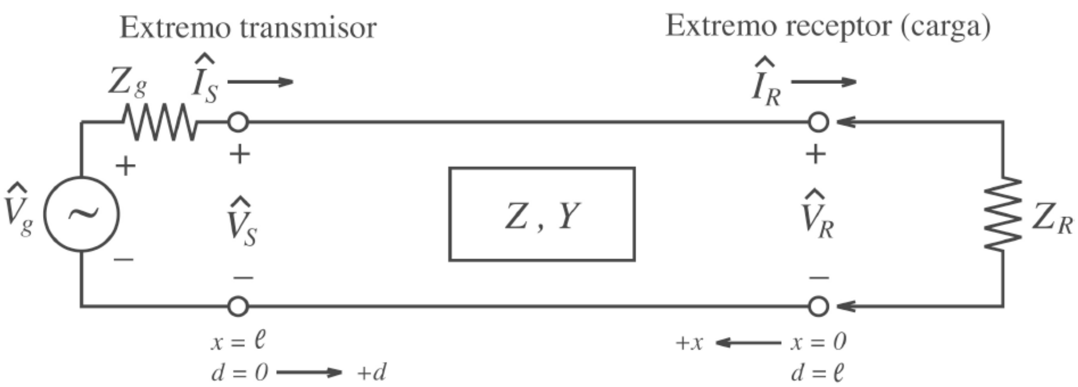
donde $\sqrt{Z/Y}$ es la **impedancia característica** de la línea, denotada por

$$Z_0 = \sqrt{Z/Y} = \sqrt{\frac{R + iwL}{G + iwC}}\Omega$$

Notar que para el caso sin pérdidas, $(R = G = 0)$, se recupera la expresión $Z_0 = \sqrt{L/C}$. El número complejo γ se conoce como **constante de propagación**

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{\left(R + iwL\right)\left(G + iwC\right)} = \alpha + i\beta$$

Ahora, consideremos una línea de transmisión de impedancia característica Z_0, como se muestra en la figura



Se escoge $x = 0$ en el extremo de la carga. El voltaje y la corriente en la carga están dados por

$$V_L = V^{+} + V^{-}$$

$$I_L = \frac{1}{Z_0}\left(V^{+} - V^{-}\right)$$

Además en la carga debe cumplirse que

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V^+ (1 + \Gamma_L)}{V^+/Z_0 (1 - \Gamma_L)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

donde Γ_L es el coeficiente de reflexión de la carga

$$\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+}$$

Despejando, se obtiene la misma expresión que para el caso sin pérdidas

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

donde ahora Γ podría ser un número complejo. A una distancia $x = l$ de la carga, se tendrá

$$V(l) = V^+ e^{\gamma l} + V^- e^{-\gamma l} = V^+ \left(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l} \right)$$

$$I(l) = \frac{V^+}{Z_0} \left(e^{\gamma l} - \Gamma_L e^{-\gamma l} \right)$$

El voltaje se puede reescribir inteligentemente como

$$V(l) = \frac{V^+}{2} (1 + \Gamma_L) \left(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l} \right) + \frac{V^+}{2} (1 - \Gamma_L) \left(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l} \right)$$

lo que es equivalente a

$$V(l) = V_L \cosh \gamma l + I_L Z_0 \sinh \gamma l$$

del mismo modo

$$I(l) = I_L \cosh \gamma l + \frac{V_L}{Z_0} \sinh \gamma l$$

Así es posible obtener el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea en términos del voltaje y la corriente en la carga ($x = 0$). La impedancia de la línea a una distancia l de la carga se define como la razón del voltaje total a la corriente total a una distancia l de la carga

$$Z_{in} = Z_l = \frac{V(l)}{I(l)} = \frac{V^+ \left(e^{\gamma l} + \Gamma e^{-\gamma l} \right)}{\frac{V^+}{Z_0} \left(e^{\gamma l} - \Gamma e^{-\gamma l} \right)}$$

$$Z_{in} = Z_0 \left(\frac{e^{\gamma l} + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-\gamma l}} \right)$$

$$Z_{in} = Z_0 \left(\frac{Z_L + Z_0 tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L tanh \gamma l} \right)$$

Nota

Se puede definir como línea de transmisión de alta frecuencia a aquellas que están específicamente diseñadas para transmitir ondas electromagnéticas cuyas longitudes de onda son pequeñas (alta frecuencia) y, por tanto, comparables a la extensión completa de la línea. Bajo estas condiciones, la longitud física de la línea puede ser pequeña, pero dado que el tamaño de la línea es comparable a la longitud de onda, las aproximaciones útiles para bajas frecuencias, que asumen propagación energética instantánea entre dos puntos separados de un mismo conductor, dejan de tener sentido y se ponen de manifiesto fenómenos de retardo en la propagación. Esto ocurre con las señales de radio, de microondas y ópticas, y con las señales que se encuentran en los circuitos digitales de alta velocidad.

Problema

Una línea de transmisión de alambres paralelos se define por los siguientes parámetros

$$R = 4{,}11\Omega/km$$

$$L = 0{,}00337H/km$$

$$G = \frac{0{,}29}{10^6}S/km$$

$$C = \frac{0{,}00915}{10^6}F/km$$

a) Encontrar Z_0, γ y la impedancia de entrada a 20 km de distancia de una carga $Z_L = 50 + i50$, si la frecuencia de la línea es $f = 1000$

b) Repetir para el caso en que la línea no es disipativa, es decir $R = G = 0$

Solución

a) La impedancia característica de la línea a una frecuencia de 1 kHz está dada por

$$Z_0 = \sqrt{R + i2\pi fL}G + i2\pi fC$$

$$Z_0 = 612{,}515 - i5{,}34784$$

Además

$$\gamma = \sqrt{(R + i2\pi fL)\,(G + i2\pi fC)}$$

$$\gamma = 0{,}00345889 + i0{,}0350444 = \alpha + i\beta$$

A una distancia de 20 km de la línea, la impedancia de la línea está dada por

$$Z_{in} = Z_0 \frac{(Z_L + Z_0 tanh\gamma l)}{Z_0 + Z_L tanh\gamma l}$$

$$Z_{in} = 225{,}982 + i575{,}173$$

b) Si la línea es no disipativa, entonces

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 606{,}882\Omega$$

además γ es puramente imaginario (no hay atenuación)

$$\gamma = \sqrt{(i2\pi fL)\,(i2\pi fC)} = i0{,}0348904$$

La impedancia de la línea a 20 km de la carga

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 tanh\gamma l}{Z_0 + Z_L tanh\gamma l} = 601{,}122 + i80{,}6435$$

Problema

Una línea de transmisión sin pérdidas, de 80 cm de longitud, opera a 600 Mhz. Los parámetros de la línea son $L = 0{,}25\ \mu H/m$ y $C = 100\ pF/m$. Encuentre la impedancia característica de la línea, la constante de fase, la velocidad de propagación y el coeficiente de reflexión Γ si la impedancia de carga es $Z_L = 100\ \Omega$

Solución

La impedancia característica de la línea está dada por

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

pues se trata de una línea sin pérdidas. Evaluando

$$Z_0 = 50\Omega$$

Además, la constante de propagación es

$$\gamma = \alpha + i\beta = \sqrt{(i2L)\,(i2\pi fC)}$$

donde $f = 600 \times 10^6$ Hz

$$\gamma = i18{,}8496 = i\beta$$

La velocidad de propagación es

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \times 10^8 m/s$$

Finalmente, el coeficiente de reflexión es

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0{,}3333$$

0.7. Líneas sin distorsión

Vimos que en general, $\gamma = \alpha + i\beta$ puede ser un número complejo cuya parte real es responsable de una atenuación de los voltajes y corrientes a medida que se propagan en la línea. Se define una línea de distorsión como una línea donde la constante de atenuación α no depende de la frecuencia, y donde la constante de propagación β es lineal en la frecuencia. Esto ocurre si la impedancia característica es real

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + iwL}{G + iwC}}$$

es decir, se cumple que

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G}$$

y entonces

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\Omega$$

En efecto

$$\gamma = \sqrt{(R + iwL)(G + iwC)}$$

$$\gamma = \sqrt{RG}\sqrt{\left(1 + iw\frac{L}{R}\right)\left(1 + iw\frac{C}{G}\right)}$$

$$\gamma = \sqrt{RG}\left(1 + iw\frac{L}{R}\right) = \sqrt{RG}\left(1 + iw\frac{C}{G}\right)$$

o

$$\gamma = \sqrt{RG} + iw\sqrt{LC} = \alpha + i\beta$$

0.8. Líneas con pérdidas bajas

Si las pérdidas de una línea de transmisión son pequeñas, es decir $RG << w^2LC$, entonces

$$\gamma = \sqrt{(R + iwL)(G + iwC)}$$

$$\gamma = \sqrt{RG + iwRC + iwLG - w^2LC}$$

$$\gamma = iw\sqrt{LC}\sqrt{1 - \frac{RG}{w^2LC} + \frac{RC + LG}{iwLC}}$$

Despreciando el término RG/w^2LC y utilizando una expansión en taylor a primer orden en $(RC + LG)/(iwLC)$

$$\gamma \approx iw\sqrt{LC}\left(1 - \frac{1}{2}i\frac{RC + LG}{iwLC}\right)$$

$$\gamma \approx \frac{1}{2}\left(\frac{RC + LG}{\sqrt{LC}} + iw\sqrt{LC}\right)$$

Así, la constante de atenuación para una línea poco disipativa es

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(\frac{RC+LG}{\sqrt{LC}}\right)$$

y la constante de propagación

$$\beta \approx w\sqrt{LC}$$

Es aproximadamente igual que para una línea no disipativa

0.9. Líneas con pérdidas altas

En este caso, $RG >> w^2LC$

$$\gamma = \sqrt{RG}\sqrt{1+iw\left(\frac{C}{G}+\frac{L}{R}\right)-w^2\frac{LC}{RG}}$$

$$\gamma \approx \sqrt{RG}\sqrt{1+iw\left(\frac{C}{G}+\frac{L}{R}\right)}$$

Utilizando la expansión en Taylor a primer orden en $C/G + L/R$

$$\gamma \approx \sqrt{RG}\left(1+\frac{1}{2}iw\left(\frac{C}{G}+\frac{L}{R}\right)\right)$$

Entonces, en el caso de una línea altamente disipativa

$$\alpha \approx \sqrt{RG}$$

y

$$\beta \approx \frac{1}{2}w\left(C\sqrt{\frac{R}{G}}+L\sqrt{\frac{G}{R}}\right)$$

Problema

Las especificaciones para una línea coaxial rígida con dieléctrico aire, utilizada en un radar que opera a 3 Ghz son las siguientes: Construída en cobre, soportada por anillos de teflón cada cierto intervalo para mantener el dieléctrico de aire, diámetro externo 2,2225 cm, espesor de la pared 0,08128 *cm*, diámetro del conductor interno 0,9525 cm, impedancia característica 46, 4 Ω; atenuación de 0,066 dB/m, máximo peak de potencia 1,31 kW, potencia de operación 200 W, mínima longitud de onda para operación segura 5,28 cm

a) Determine los valores por metro de L,C, G, y R_a para la línea, despreciando la inductancia interna

b) Determine la impedancia característica y la atenuación correcta y compare los resultados con los entregados en la especificación de la línea

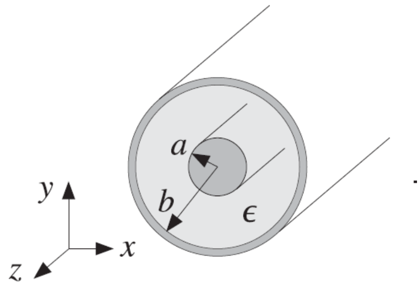
Solución

a) Los parámetros relevantes en la geometría de la línea coaxial son los siguientes

$$a = \frac{0{,}9525}{2} \times 10^{-2}$$

$$b = \frac{2{,}2225}{2} \times 10^{-2}$$

$$t = 0{,}08128 \times 10^{-2}$$



La capacitancia por unidad de largo está dada por

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} = 6{,}56573 \times 10^{-11} F/m$$

La inductancia(externa) por unidad de largo es

$$L = \frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi} = 1{,}6946 \times 10^{-7} H/m$$

La resistencia AC por unidad de largo

$$R_a = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \frac{1}{2\pi\sigma_c\delta}$$

donde $\sigma_c = 58 \times 10^6$ (S/m) es la conductividad del cobre y δ la profundidad de penetración, la cual a una frecuencia de $f = 3$ Ghz está dada por

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 58 \times 10^6}} m^{-1}$$

y entonces

$$R_a = 0{,}682203\Omega/m$$

La conductancia es nula, pues el dieléctrico aire no tiene conductividad

$$G = 0S/m$$

b) La impedancia característica para una línea de bajas pérdidas a alta frecuencia es

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50{,}8032$$

La cual es mayor que la impedancia especificada ($46,8\ \Omega$). Además, el coeficiente de atenuación es, aproximadamente

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(\frac{RC + LG}{\sqrt{LC}}\right)$$

en este caso

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(\frac{RC}{\sqrt{LC}}\right) = 0{,}00671417$$

Esto quiere decir que en la línea existe una atenuación (por unidad de largo) igual a

$$At = e^{-\alpha} = 0{,}993308$$

En decibeles

$$-20Log[At] = 0{,}0583185dB/m$$

la cual es menor a la especificada, de 0.0666 dB/m