Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería

Teoría Electromagnética

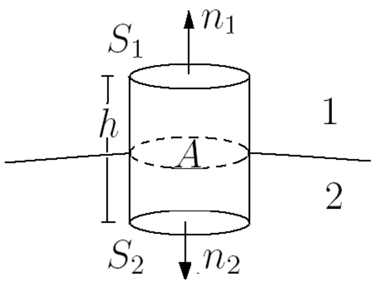
Ayudantía 4

0.1. Condiciones de borde en la frontera

Las condiciones que deben satisfacer los campos electromagnéticos en una zona interfacial que separa dos medios se deducen, por supuesto, de las ecuaciones de Maxwell. La más simple de deducir es la que cumple la condición para la componente normal del campo magnético, y se obtiene a partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

En cualquier zona interfacial entre dos medios se puede construír una superficie cilíndrica como se muestra en la figura



Integrando la ecuación de Maxwell sobre el volumen limitado por el cilindro se obtiene

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = \oiint_{S(V)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

$$\iint_{S_1} dS_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{B}_1(t, \vec{x}) + \iint_{S_2} dS_2 \hat{n}_2 \cdot \vec{B}_2(t, \vec{x}) + \iint_{S_3} dS_3 \hat{n}_3 \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

donde S_3 es el manto del cilindro, mientras S_1 y S_2 las tapas. Si $\vec{B}(t, \vec{x})$ es finito, el último término se puede anular si $h \to 0$. Además, en este límite ($h \to 0$) las superficies S_1 y S_2 son prácticamente las mismas, $S_1 \to S_2$, con $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$ y entonces

$$\oiint_{S(V)} d\vec{S}(\hat{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = \iint_{S_1} dS_1 \left(\hat{n}_1 \cdot \vec{B}_1(t, \vec{x}) - \hat{n}_1 \cdot \vec{B}_2(t, \vec{x}) \right) = 0$$

$$\hat{n}_1 \cdot \vec{B}_1(t,\vec{x}) - \hat{n}_1 \cdot \vec{B}_2(t,\vec{x}) = 0$$

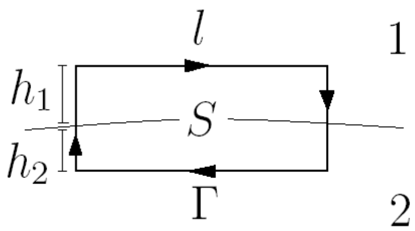
Es decir, la componente **normal** del campo magnético es continua al atravesar un medio

$$B_{1n} = B_{2n}$$

Ahora veremos que la componente tangencial del campo eléctrico es continua. A partir de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} = 0$$

Integremos esta ecuación sobre una superficie plana rectangular como la de la figura



El contorno de S es el camino Γ indicado en la figura. Utilizando el teorema de Stokes

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x})\right) = \oint_\Gamma d\vec{x} \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) = -\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}$$

En el caso en que $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$

$$lE_{1t} - lE_{2t} = 0$$

la integral de superficie por supuesto es nula ya que la superficie total tiende a cero $S \to$(suponemos que la derivada temporal del campo magnético es finita). De aquí se deduce que la componente **tangencial** de $\vec{E}(t,\vec{x})$ debe ser continua al atravesar una interfaz entre dos medios

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Utilizando ahora la primera ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t,\vec{x}) = \rho(t,\vec{x})$$

y utilizando la misma superficie para el caso del campo magnético (cilindro de altura h) se obtiene

$$\iiint_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(t,\vec{x}) = \iiint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

$$\oiint_{V(S)} d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{D}(t,\vec{x}) = \iint_V d^3x \rho(\vec{x})$$

si $h \to 0$, entonces

$$\left(D_{1n} - D_{2n}\right) A = \sigma A$$

donde A es la superficie de las tapas, y σ es la densidad superficial de carga en la frontera que divide a los dos medios. Así, la componente normal del campo $\vec{D}(t,\vec{x})$ es discontinua al atravesar una superficie cargada

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \hat{n}_{21} = \sigma$$

con n_{21} la normal desde 2 hacia 1. Equivalentemente para medios lineales

$$\left(\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2\right) \hat{n}_{21} = \sigma$$

Por último, de la ecuación

$$\vec{\nabla} \times H(t,\vec{x}) = \vec{J}(t,\vec{x}) + \frac{\partial D(t,\vec{x})}{\partial t}$$

y utilizando la misma superficie de integración que el caso del campo eléctrico, se obtiene

$$\oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times H(t,\vec{x})\right) = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot J(t,\vec{x}) + \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial D(t,\vec{x})}{\partial t}$$

$$\oint_\Gamma d\vec{x} \cdot H(t,\vec{x}) = \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(t,\vec{x}) + \oiint_S d\vec{S}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial D(t,\vec{x})}{\partial t}$$

Si nuevamente h_1 y h_2 tienden a cero, y la derivada temporal del campo $\vec{D}$ es finita

$$(H_1 - H_2) \cdot \vec{l} = \vec{J}(t,\vec{x}) \cdot \left(\hat{n}_{21} \times \vec{l}\right)$$

donde n_{21} es la normal desde el medio 2 al medio 1, y $\vec{l}$ es un vector de magnitud l y dirección tangente a la interfaz. Es decir, la componente tangencial de $\vec{H}(t,\vec{x})$ es discontinua al atravesar un medio con densidad de carga superficial en la interfaz

$$(H_1 - H_2) \cdot \vec{l} = \left(\vec{J}(t,\vec{x}) \times \hat{n}_{21}\right) \cdot \vec{l}$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J} \times \hat{n}_{21}$$

Esto se puede reescribir

$$\hat{n}_{21} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}$$

Resumen

Al atravesar una interfaz entre dos medios (1 y 2), los campos electromagnéticos satisfacen

$$B_{1n} = B_{2n}$$

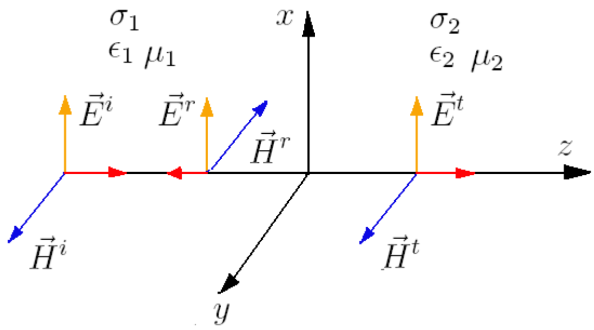
$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) \cdot \hat{n}_{21} = \sigma$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J} \times \hat{n}_{21}$$

0.2. Condiciones de Borde para incidencia normal

Las ondas electromagnéticas que se propagan en materiales generalmente entran en el material a través de una frontera entre éste y otro medio, que puede ser por ejemplo, aire o vacío. Aquí utilizaremos las condiciones de borde que satisfacen los campos para el caso de ondas que inciden normalmente sobre una interfaz. (Esto significa que la dirección de propagación es perpendicular a la frontera). Veremos que la onda incidente será acompañada por una onda reflejada y una transmitida. Consideremos el caso que se muestra en la figura



Se aprecia una onda incidente ($\vec{E}^i(x,z)$, $\vec{H}^i(y,z)$) que se desplaza en el sentido positivo de z, los campos $\vec{E}^r(x,z)$, $\vec{H}^r(y,z)$ describen la onda reflejada que se desplaza en el sentido negativo de z, y $\vec{E}^t(x,z)$, $\vec{H}^t(y,z)$ describen la onda transmitida. La interfaz es el plano $z=0$, con el medio 1 a la izquierda y el medio 2 a la derecha. Más concretamente

$$\vec{E}^i(t,z) = E^i e^{-ikz} e^{iwt}\hat{\imath}$$

$$\vec{E}^r(t,z) = E^r e^{ikz} e^{iwt}\hat{\imath}$$

$$\vec{E}^t(t,z) = E^t e^{-ikz} e^{iwt}\hat{\imath}$$

$$\vec{H}^i(t,z) = H^i e^{-ikz} e^{iwt}\hat{\jmath}$$

$$\vec{H}^r(t,z) = -H^r e^{ikz} e^{iwt}\hat{\jmath}$$

$$\vec{H}^t(t,z) = H^t e^{-ikz} e^{iwt}\hat{\jmath}$$

Estas son ondas planas que se propagan en dirección z. Son soluciones a las Ecuaciones de Maxwell si

$$k = \beta - i\alpha$$

Con α y β encontrados anteriormente (Son propiedad de la frecuencia y del medio en el cual se propagan las ondas). Interesa determinar que relación se cumple entre las magnitudes de los campos incidentes, reflejados y transmitidos. Para ello, usaremos el hecho de que el campo eléctrico debe ser continuo en $z=0$ (es completamente transversal a la interfaz). Esto significa

$$\vec{E}^i(t,0) + \vec{E}^r(t,0) = \vec{E}^t(t,0)$$

o bien

$$E^i + E^r = E^t$$

Además, si no hay una corriente superficial en la interfaz, el campo $\vec{H}(t,z)$ es también continuo en $z=0$

$$\vec{H}^i(t,0) + \vec{H}^r(t,0) = \vec{H}^t(t,0)$$

o bien

$$H^i - H^r = H^t$$

Además, para cada onda las magnitudes entre $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están dadas por las impedancias intrínsecas del medio. En resumen, se debe resolver lo siguiente

$$\begin{aligned} E^i + E^r &= E^t \\ H^i - H^r &= H^t \\ \frac{E^i}{H^i} = \eta_1 &= \frac{E^r}{H^r} \\ \frac{E^t}{H^t} &= \eta_2 \end{aligned}$$

Utilizando la última junto a las dos primeras se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{E^t}{H^t} = \eta_2 &= \frac{E^i + E^r}{H^i - H^r} \\ \eta_2 &= \frac{E^i + E^r}{\frac{1}{\eta_1}\left(E^i - E^r\right)} \\ \eta_2 = \eta_1 \frac{E^i + E^r}{E^i - E^r} &\longrightarrow E^i\left(\eta_2 - \eta_1\right) = E^r\left(\eta_1 + \eta_2\right) \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} E^r &= E^i\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right) \\ E^t &= E^i\left(\frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\right) \\ H^r &= H^i\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right) \\ H^t &= H^i\left(\frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right) \end{aligned}$$

Es inmediato que si $\eta_1 = \eta_2$, entonces $\vec{E}^r = 0$, $\vec{H}^r = 0$, lo cual es evidente pues en este caso no existe ninguna interfaz. Recordar que la impedancia de un medio está dada en general por

$$\eta = \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon_0}}$$

Para un buen conductor

$$\eta \approx \sqrt{\frac{w\mu}{\sigma}} e^{i\pi/4}$$

Para un medio dieléctrico perfecto (conductividad nula)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Para el espacio vacío

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

0.2.1. Incidencia Normal en un conductor perfecto: Ondas estacionarias

Un caso particular interesante de la ley de reflexión y transmisión en una interfaz para ondas que inciden normalmente es cuando el medio 2 es un conductor perfecto. En este medio, la impedancia intrínseca tiende a cero

$$\lim_{\sigma\to\infty} \eta_2 = \lim_{\sigma\to\infty} \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon_0}} = 0$$

Luego, se cumple

$$E^r = E^i\left(\frac{-\eta_1}{\eta_1}\right) = -E^i$$
$$E^t = 0$$
$$H^r = H^i\left(\frac{-\eta_1}{\eta_1}\right) = -H^i$$
$$H^t = 0$$

Es decir, la onda es **completamente reflejada**. Veremos que esta condición da origen a la creación de una onda estacionaria. El campo eléctrico total queda

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}^i(t,z) + \vec{E}^r(t,z)$$

$$\vec{E}(t,z) = E^i e^{-ikz} e^{iwt}\hat{\imath} - E^i e^{ikz} e^{iwt}\hat{\imath}$$

$$\vec{E}(t,z) = E^i e^{iwt}\hat{\imath}\left(e^{-ikz} - e^{ikz}\right)$$

Si el medio 1 es un dieléctrico perfecto, entonces $k = \beta$ ($\alpha = 0$)

$$\vec{E}(t,z) = E^i e^{iwt}\hat{\imath}\left(e^{-i\beta z} - e^{i\beta z}\right) = -2i\sin(\beta z)E^i e^{iwt}\hat{\imath}$$

Tomando la parte real

$$\vec{E}(t,z) = 2E^i\sin(\beta z)\sin(wt)\hat{\imath}$$

Esta es una onda que se anula para valores determinados de z ($\forall t$), dados por

$$z = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{wn\pi}{c} = \frac{fn}{2\lambda f}$$

$$z = \frac{n}{2\lambda}, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

donde λ es la longitud de onda en el medio 1.

Por otra parte, el campo eléctrico se anula para todo t tal que

$$\sin wt = 0 \rightarrow t = \frac{n\pi}{w}, n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Esta onda es llamada **estacionaria** puesto que no se propaga, sino que simplemente oscila en el espacio y el tiempo.

Para el campo magnético se tiene

$$\vec{H}(t,z) = \vec{H}^i(t,z) + \vec{H}^r(t,z)$$

$$\vec{H}(t,z) = H^i e^{-i\beta z} e^{iwt}\hat{j} + H^i e^{i\beta z} e^{iwt}\hat{j}$$

$$\vec{H}(t,z) = H^i e^{iwt}\hat{j}\left(e^{-i\beta z} + e^{i\beta z}\right) = 2H^i e^{iwt}\cos(\beta z)\hat{j}$$

tomando la parte real

$$\vec{H}(t,z) = 2H^i \cos(\beta z)\cos wt\hat{j}$$

Se anula para

$$\beta z = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\beta}$$

$$z = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda, n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Además, se aprecia que se anula para todo t tal que

$$\cos wt = 0$$

Se aprecia que para ondas estacionarias, el campo eléctrico y magnético están en un desfase de $\pi/2$

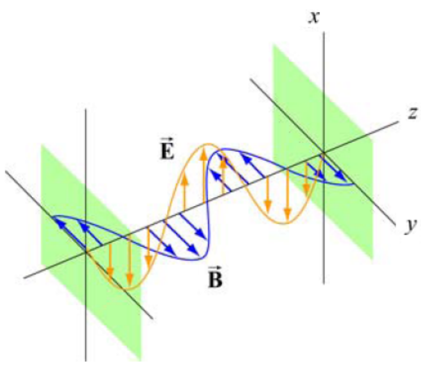
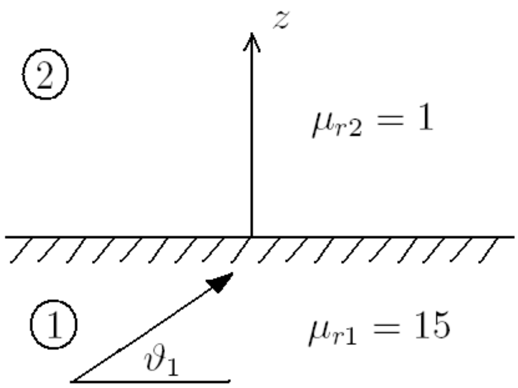


Figura 1: Ondas estacionarias se pueden lograr al confinar ondas electromagnéticas entre dos planos perfectamente conductores

Problema

En la región 1 de la figura, $\vec{B}_1 = 1{,}2\hat{\imath} + 0{,}8\hat{\jmath} + 0{,}4\hat{k}$ (T). Encuentre $\vec{H}_2$ ($\vec{H}$ en $z = +0$)



Solución

Se tiene

$$\vec{B}_1 = 1{,}2\hat{\imath} + 0{,}8\hat{\jmath} + 0{,}4\hat{k}$$

la componente normal del campo magnético a una superficie es siempre continua, es decir

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{z} = \vec{B}_2 \cdot \hat{z}$$

se desprende que el campo magnético en $z = 0+$ es de la forma

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{\imath} + B_{2y}\hat{\jmath} + 0{,}4\hat{k}$$

Además, en la regiòn 1 la permeabilidad está dada por

$$\mu_1 = \mu_{r1}\mu_0 = 15\mu_0$$

de forma que el campo $\vec{H}$ en $z = 0-$ es

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{15\mu_0}\vec{B}_1 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{\imath} + 0{,}8\hat{\jmath} + 0{,}4\hat{k}\right)$$

La componente tangencial de $\vec{H}$ es continua al atravesar una superficie **sin** densidad de carga superficial. Suponiendo que éste es el caso, el campo $\vec{H}$ en $z = 0+$ es de la forma

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{\imath} + 0{,}8\hat{\jmath}\right) + H_{2z}\hat{k}$$

En resumen

$$\vec{B}_2 = B_{2x}\hat{\imath} + B_{2y}\hat{\jmath} + 0{,}4\hat{k}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{\imath} + 0{,}8\hat{\jmath}\right) + H_{2z}\hat{k}$$

Además

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2$$

luego

$$B_{2x} = \mu_0 H_{2x} = \frac{1{,}2}{15}$$

$$B_{2y} = \mu_0 H_{2y} = \frac{0{,}8}{15}$$

$$B_{2z} = \mu_0 H_{2z} = 0{,}4 \rightarrow H_{2z} = \frac{0{,}4}{\mu_0}$$

Finalmente

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{15\mu_0}\left(1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j}\right) + \frac{0{,}4}{\mu_0}\hat{k}$$

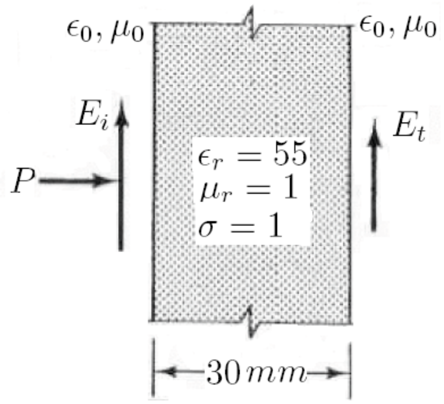
Problema

Un campo $\vec{E}$ de 500 Mhz viaja por el espacio libre e incide perpendicularmente sobre un medio parcialmente conductor como se ilustra en la figura. Si la amplitud del campo incidente es $\vec{E}_{i0} = 100\ V/m$, determine

a) Las amplitudes de las ondas una vez atravesado completamente el medio (E_{t0}, H_{t0})

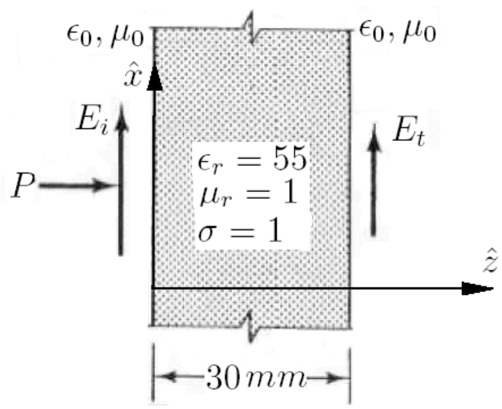
b) La potencia temporal que porta la onda incidente

c) La potencia temporal que porta la onda transmitida nuevamente al espacio



Solución

Definimos el eje $\hat{z}$ como se indica en la figura, donde el origen coincide con el extremo izquierdo del medio parcialmente conductor



La onda incidente está descrita por

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{i\left(5\times10^8 t - \beta z\right)} \hat{\imath},\ z < 0$$

donde la constante de propagación en el vacío está dada por

$$\beta = \frac{w}{c} = 5 \times 10^8 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

Al incidir normalmente sobre el medio conductor, parte de la onda se refleja, y otra es transmitida hacia el medio. Si E_{m0} es la amplitud de la onda transmitida en la interfaz ($z = 0$), entonces se cumple

$$E_{m0} = E_{i0} \left(\frac{2\eta_m}{\eta_0 + \eta_m} \right)$$

donde η_m es la impedancia intrínseca del medio conductor

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{iw\mu}{\sigma + iw\epsilon}} = \sqrt{\frac{i5\times 10^8\mu_0}{1 + i5\times 10^8 55\epsilon_0}}$$

$$\eta_2 = 44{,}5594 + i13{,}2865$$

El que sea un número complejo implica que existirá un desfase entre la onda incidente y la onda transmitida al medio. η_0 es la impedancia intrínseca del vacío

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

Así, para $E_{i0} = 100$

$$E_{m0} = 21{,}3182 + i5{,}63173i = 22{,}0495e^{i0{,}258274}$$

Con esto, la onda transmitida al medio parcialmente conductor está descrita por

$$\vec{E}_m(t,z) = E_{m0}e^{-\alpha_m z}e^{i(wt-\beta_m z)}, 0 < z < 30\times 10^{-3}$$

$$\vec{E}_m(t,z) = 22{,}0495e^{-\alpha_m z}e^{i\left(5\times 10^8 t - \beta_m z + 0{,}258274\right)}, 0 < z < 30\times 10^{-3}$$

donde la constante de atenuación (α_m) en este medio está dada por

$$\alpha_m = w\sqrt{\left(\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2} - 1\right)\right.}$$

$$\alpha_m = 5\times 10^8\sqrt{\left(\frac{\mu_0 55\epsilon_0}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{5\times 10^8 55\epsilon_0}\right)^2} - 1\right)\right.} = 24{,}26005$$

Así

$$\vec{E}_m(t,z) = 22{,}0495e^{-24{,}26005z}e^{i\left(5\times 10^8 t - \beta_m z + 0{,}258274\right)}, 0 < z < 30\times 10^{-3}$$

La magnitud del campo en $z = 30\times 10^{-3}$ es

$$E_{mt} = 22{,}0495e^{-24{,}26005\times 30\times 10^{-3}} = 10{,}6491$$

Si E_{t0} es la amplitud del campo eléctrico transmitido nuevamente al vacío, se cumple

$$E_{t0} = E_{mt} \mid \left(\frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_m}\right) \mid = 19{,}0375$$

la amplitud del campo $\vec{H}$ se relaciona con la del campo eléctrico según

$$\frac{E_{t0}}{H_{t0}} = \eta_0$$

$$H_{t0} = \frac{\eta_0}{E_{t0}} = 0{,}0504984$$

b) El promedio temporal del vector Poynting de la onda incidente es

$$\left\langle \vec{S}_i \right\rangle = \frac{E_{i0}^2}{2c\mu_0}\hat{k} = 13{,}2629\hat{k}(W/m^2)$$

c) Para la onda transmitida nuevamente al vacío

$$\left\langle \vec{S}_t \right\rangle = \frac{E_{t0}^2}{2c\mu_0}\hat{k} = 0{,}480681\hat{k}(W/m^2)$$

Problema

Se requiere que Ud. haga una estimación de la intensidad de campo eléctrico, en V/m, que requerirría generar un radar de 2 Ghz de penetración de suelo, con el objeto de detectar piezas metálicas de gran tamaño, enterradas a una profundidad de hasta 2 metros. Dependiendo de la composición y la humedad del terreno, este puede tener el siguiente rango de parámetros

$$10^{-4} \leq \sigma \leq 10^{-2}$$

$$3 \leq \epsilon_{rt} \leq 8$$

$$\mu_{rt} = 1$$

Por otra parte se estima que las piezas enterradas tienen el siguiente rango de parámetros

$$10^7 \leq \sigma_m \leq 6 \times 10^7$$

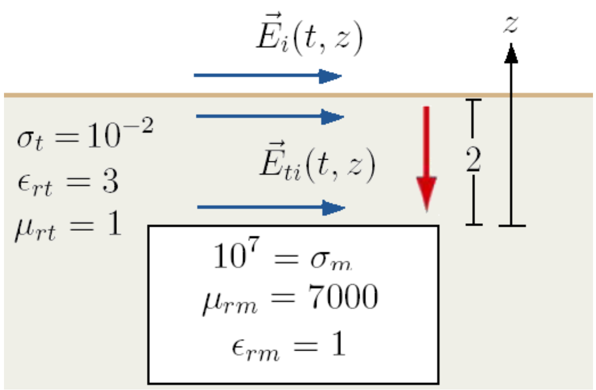
$$1 \leq \mu_{rm} \leq 7000$$

$$\epsilon_{rm} = 1$$

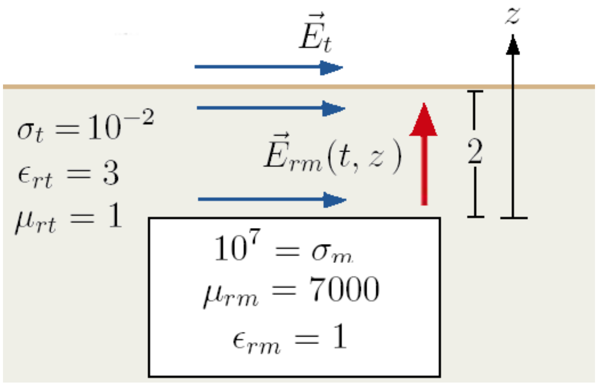
Se requiere saber que intensidad de campo eléctrico en V/m se requiere en el aire, sobre la superficie del terreno, para detectar en el aire sobre la superficie del terreno, un rebote del objeto metálico que tenga una amplitud de $1V/m$, asumiendo incidencia normal

Solución

Para estimar la intensidad mínima de campo eléctrico que debe generar el radar, debemos suponer la peor situación posible. Supondremos que hay una pieza metálica situada a 2 m de profundidad en la tierra. El caso menos favorable para la propagación en la tierra es cuando ésta presenta su máxima conductividad (mayor atenuación). Más aún, para que ésta se comporte como un buen conductor (atenuante) debe tenerse $\sigma_t >> w\epsilon_t$, de forma que consideramos el caso de mayor conductividad y menor constante dieléctrica.
La reflexión en la placa metálica será buena en la medida que η_m (impedancia intrínseca del metal) sea lo más pequeña posible. De esta forma, el peor de los casos para la reflexión en la pieza metálica ocurre cuando η_m toma su máximo valor posible, y entonces cuando posee la menor conductividad y la mayor permeabilidad magnética.



En la figura de arriba se aprecia una onda incidente $\vec{E}_i$ (campo emitido por el radar en la superficie), y una onda transmitida en la tierra $\vec{E}_{ti}$, que se propaga en dirección $-z$, esta onda será reflejada por la pieza metálica en $z = 0$



En esta figura se muestra el campo que se ha reflejado en el metal y se propaga hacia la superficie, que llamaremos $\vec{E}_{rm}$, y la onda recibida finalmente en la superficie, llamada $\vec{E}_t$. Sabemos que esta última tiene una magnitud de $E_t = 1$ (V/m). La magnitud de la onda reflejada en el metal se describe por

$$E_{rm}(z) = E_{r0}e^{-\alpha z}$$

donde α es el coeficiente de atenuación en la tierra

$$\alpha = w\sqrt{\left(\frac{\mu_t \epsilon_t}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_t}{w\epsilon_t}\right)^2} - 1\right)\right)}$$

con $w = 2 \times 10^9$ Hz, $\sigma_t = 10^{-2}$ (S/m), $\mu_t = 4\pi 10^{-7} = \mu_0$, $\epsilon_t = \epsilon_{rt}\epsilon_0 = 3 \times 8{,}854 \times 10^{-12}$. Reemplazando estos valores

$$\alpha = 1{,}08742$$

Debido a las condiciones de contorno en la interfaz ($z = 2$), se cumple

$$E_t = 1 = E \mid \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_t} \mid$$

donde E es la magnitud del campo $\vec{E}_{rm}$ en $z = 2$, y η_0 es la impedancia intrínseca del aire, considerada igual a la del vacío.

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

y la impedancia intrínseca de la tierra

$$\eta_t = \sqrt{\frac{iw\mu_0}{\sigma_t + iw\epsilon_0\epsilon_{rt}}} = 217{,}434 + i3{,}2564$$

con esto se obtiene

$$E = \mid \frac{\eta_0 + \eta_t}{2\eta_0} \mid = 0{,}788393 V/m$$

Además

$$E = E_{rm}(z = 2) = E_{r0}e^{-\alpha 2} = E_{r0}e^{-1{,}08742 \times 2}$$

de donde la magnitud de la onda reflejada en el metal en $z = 0$ es

$$E_{r0} = Ee^{1{,}08742 \times 2} = 6{,}93842 V/m$$

Ahora, esta onda reflejada en el metal proviene de la onda $\vec{E}_{ti}$ que fue transmitida a la tierra. La magnitud de esta última se puede expresar como

$$E_{ti} = E_0 e^{\alpha z}$$

donde E_0 (magnitud en $z = 0$) está relacionada con E_{r0} mediante

$$E_{r0} = E_0 \mid \frac{\eta_m - \eta_t}{\eta_m + \eta_t} \mid$$

donde la impedancia intrínseca de la pieza de metal es

$$\eta_m = \sqrt{\frac{iw\mu_0\mu_m}{\sigma_m + iw\epsilon_0\epsilon_m}}$$

con $w = 2 \times 10^9$ Hz, $\sigma_m = 10^7$ (S/m), $\mu_m = 700$, $\epsilon_m = 1$ resulta

$$\eta_m = 2{,}35095 + i2{,}35095$$

Notar que es un complejo con fase $\pi/4$, que es lo que se obtiene para un buen conductor. Con todo esto

$$E_0 = E_{r0} \mid \frac{\eta_m + \eta_t}{\eta_m - \eta_t} \mid = 7{,}09235$$

Justo en $z = 2$, la magnitud de la onda transmitida a la tierra es

$$E_{ti}(2) = E_0 e^{\alpha z} = 7{,}09235 e^{1{,}08742 \times 2} = 62{,}4177 V/m$$

Si E_i es la magnitud de la onda que emite el radar en la superficie, entonces se cumple

$$E_{ti}(2) = E_i \mid \frac{2\eta_t}{\eta_t + \eta_0} \mid$$

$$E_i = 62{,}4177 \mid \frac{\eta_t + \eta_0}{2\eta_t} \mid$$

$$E_i = 85{,}3109$$

Es decir, se requiere emitir un campo de magnitud aproximadamente $E_i = 85,3$ (V/m)