Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería

Ayudantía Análisis de Señales

Fabián Cádiz

Transformada Z

Consideremos un sistema discreto lineal e invariante, representado por una respuesta al impulso $h[n]$, como se muestra en la figura

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Supongamos a continuación que la entrada del sistema tiene la forma $x[n] = z^n$, donde $z \in \mathbb{C}$. Tenemos entonces

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k} h[k] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} h[k]$$

Asumiendo que

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

converge, tenemos entonces que

$$y[n] = H(z) z^n$$

Es decir, la salida del sistema es escencialmente la entrada ponderada por un número complejo $H(z)$. En otras palabras, decimos que las funciones z^n , con z complejo forman una familia de autofunciones de un sistema LTI. Definimos la **transformada Z** de una señal discreta $x[n]$ como

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = Z\left\{x[n]\right.}$$

la cual es una función compleja, y es el análogo a la transformada de Laplace para señales discretas.

Relación con la transformada de Fourier

En general, se tiene $z = re^{iw}$, donde $r = |z|$. Luego, la transformada Z puede ser reescrita como

$$X(z) = X(re^{iw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-iwn} = F\left\{x[n]r^{-n}\right\}(w)$$

Es decir, la transformada Z evaluada en $z = re^{-iw}$ corresponde a la transformada de Fourier de $x[n]r^{-n}$ evaluada en w.

Convergencia de la transformada Z
La región de convergencia (llamada ROC) corresponde a todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que la transformada Z de $x[n]$ converge absolutamente. Es decir

$$ROC = \left\{ z = re^{iw} \;\; | \;\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}|^2 < \infty \right\}$$

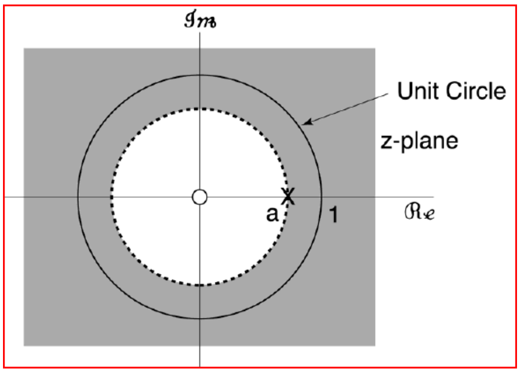
Notar que ésta depende del módulo de z (r) y no su fase. Recordar que para el caso de la Transformada de Laplace, la región de convergencia de ésta depende únicamente de la parte real de s.

Notar además que si el círculo unitario $z = e^{iw}$ $(r = 1)$ pertenece a la región de convergencia, entonces existe la transformada de Fourier de $x[n]$.

Ejemplo Consideremos la señal $x[n] = a^n u[n]$. Su transformada Z está dada por

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Esto último es cierto si $|az^{-1}| < 1$, o equivalentemente, $|z| > a$. Es decir, la región de convergencia es la región exterior al círculo de radio a en el plano complejo.



La figura muestra la región de convergencia para el caso en que $a < 1$

En conclusión

$$Z\left\{a^n u[n]\right\} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > 1$$

El teorema de Cauchy Sea $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja, y Γ una curva cerrada recorrida en sentido antihorario. El teorema de Cauchy en su versión más simple establece que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz \frac{F(z)}{z-a} = \begin{cases} F(a) & \text{si } \Gamma \text{ encierra a } a \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde F es analítica en una región que contiene a Γ. Recordar que una función es analítica en un punto si admite una serie de potencias en torno a él.

Transformada Z inversa

El teorema de Cauchy recién enunciado permite obtener una expresión para la transformada Z inversa. En efecto, a partir de la definición de la transformada Z, y multiplicando por z^{k-1}

$$X(z)z^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{k-n-1}$$

donde hemos supuesto $x[n] = 0$ para $n < 0$. Integrando sobre una curva cerrada Γ contenida en la región de convergencia de $X(z)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz X(z)z^{k-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{k-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\oint_\Gamma dz z^{k-n-1}$$

Ahora, por el teorema de Cauchy

$$\oint_\Gamma dz z^{k-n-1} = 2\pi i\delta(k-n)$$

de esta forma

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz X(z)z^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\delta(k-n) = x[k]$$

Finalmente, se obtiene la transformada Z inversa

$$\boxed{x[k] = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma X(z)z^{k-1}dz}$$

Problema 1

Dada la transformada Z de la señal discreta $x[n]$:

$$X(z) = \frac{3z^2 - 5/6z}{(z - 1/4)(z - 1/3)}$$

calcule $x[n]$ utilizando transformadas conocidas. Compare usando la elegante definición de la transformada Z inversa.

Solución

Es claro que se debe calcular la transformada inversa de x. Para ello, podemos intentar escribir $X(z)$ como una suma de transformadas conocidas. Por ejemplo, sabemos que

$$Z\{b^n u[n]\} = \frac{z}{z-b} = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| < b$$

Descomponiendo en fracciones parciales, obtenemos

$$X(z) = \frac{2z}{(z - 1/3)} + \frac{z}{(z - 1/4)}$$

De aquí es claro que

$$x[n] = \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u[n]$$

Ahora bien, si uno no recuerda las transformadas típicas, o bien resulta muy complejo descomponerla en transformadas conocidas (incluso podría ser imposible), siempre se puede recurrir a la fórmula inversa. Esta está dada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz X(z) z^{n-1}, \quad n > 0$$

donde la integral se realiza sobre cualquier curva cerrada Γ suficientemente regular contenida en la región de convergencia de $X(z)$. Vemos que esta última posee un polo en $z = 1/3$ y otro en $z = 1/4$, luego la región de convergencia es $ROC = \{z \mid |z| > 1/3\}$. Podríamos entonces construír cualquier curva cerrada que se encuentre contenida en la región de convergencia (y que por lo tanto encierra ambos polos), y calcular la integral utilizando una parametrización de la curva. En la práctica se utiliza el Teorema de Cauchy:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz X(z) z^{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz \frac{2z^n}{(z - 1/3)} + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma dz \frac{z^n}{(z - 1/4)}$$

Para $n \geq 0$

$$x[n] = 2z^n\Big|_{z=1/3} + z^n\Big|_{z=1/4} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Problema 2

Una de las aplicaciones del análisis de señales es la eliminación de ecos acústicos. Si $x[n]$ representa una señal acústica, producida por ejemplo por una orquesta, la señal que se escucha es $y[n] = h[n] * x[n]$, con

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(n - k)$$

donde h_k representa el factor de ganancia del eco k. Designe con S_1 a este sistema. Para eliminar la distorsión producida por los ecos, se procesa la señal $y[n]$ mediante un sistema lineal e invariante de función respuesta al impulso

$$g[n] = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(n-k)$$

Realizado el procesamiento, la señal que se obtiene es $v[n] = g[n] * y[n]$. Designe con S_2 a este segundo sistema.

a) Obtenga una ecuación de diferencias para S_1.
b) Plantee una relación general que permita obtener los coeficientes g_k a partir de los coeficientes h_k. Qué condición satisfacen los sistemas S_1 y S_2?
c) Obtenga los coeficientes g_k para $h_k = \alpha^k$, con $0 < \alpha < 1$.
d) Dibuje un diagrama de bloques que represente el sistema S_2.

Solución
a) Tenemos que $y[n] = h[n] * x[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} h_i \delta(k-i)u[k]x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-i)x[n-k] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x[n-i]$$

Finalmente, como $x[n-i] = 0$ para $n-i < 0$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{n} h_i x[n-i]$$

Esta es la ecuación de diferencias para S_1.

b) Se desea que $x[n] = v[n]$, es decir, la respuesta al impulso del sistema total debe ser igual a $\delta(n)$. Esto ocurre si

$$h[n] * g[n] = \delta(n)$$

Esto significa

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(n-k) \right) * \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(n-k) \right) = \delta(n)$$

$$h[n] * g[n] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(j-k) \sum_{i=0}^{\infty} g_i \delta(n-i-j) = \delta(n)$$

Notar que $\delta(j-k)$ será distinto de cero para $k = j$. Dado que k sólo toma valores positivos, los términos de la suma en j con $j < 0$, siempre serán nulos.

$$h[n] * g[n] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(j-k) \sum_{i=0}^{\infty} g_i \delta(n-i-j) = \delta(n)$$

$$h[n] * g[n] = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \sum_{i=0}^{\infty} g_i \delta(n-i-j) = \delta(n)$$

Por último, se debe notar que de la suma en i sólo sobrevive el término correspondiente a $i = n - j$, y este último existe siempre y cuando $j < n$. La condición es

$$h[n] * g[n] = \sum_{j=0}^{n} h_j g_{n-j} = \delta(n)$$

c) Si $h_k = \alpha^k$, con $0 < \alpha < 1$

$$h[n] * g[n] = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j g_{n-j} = \delta(n)$$

Esto significa

$$\alpha^0 g_0 = 1, \rightarrow g_0 = 1$$

$$\alpha^0 g_1 + \alpha^1 g_0 = 0, \rightarrow g_1 = -\alpha$$

$$\alpha^0 g_2 + \alpha^1 g_1 + \alpha^2 g_0 = 0, \rightarrow g_2 = 0$$

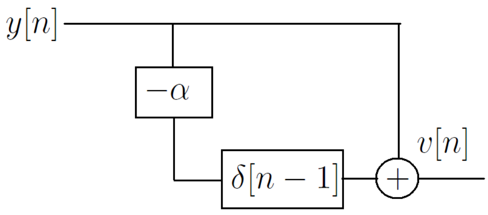
$$\alpha^0 g_3 + \alpha^1 g_2 + \alpha^2 g_1 + \alpha^3 g_0 = 0, \rightarrow g_3 = 0$$

Es fácil ver entonces que $g_k = 0$ para $k \geq 3$.

d) El sistema S_2 está representado por la siguiente respuesta al impulso

$$g[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$$

Por lo que el diagrama de bloques consiste en un multiplicador por $-\alpha$, un retardo en una unidad de tiempo, y un sumador.



Problema 3

Considere la ecuación de diferencias siguiente

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n-1]$$

a) Deduzca la forma general de la solución dado $x[n]$ y la condición inicial $y[0] = y_0$. Comente las principales características del sistema obtenido.
b) Deduzca usando la transformada Z la solución de la ecuación de diferencias para una entrada $x[n] = u[n]$, con $y[0] = 0$.
c) Aplique convolución para resolver el problema b)
d) Determine las condiciones que deben cumplir a y b para que la solución $y[n]$ tienda a una constante, cuando n tiende a infinito.

Solución

a) Resolveremos la ecuación utilizando la transformada Z. Dado que

$$Z\{y[n-1]\} = \frac{1}{z} Z\{y[n]\} + y[-1]$$

Entonces

$$Y(z) = a\left(\frac{1}{z}Y(z) + y[-1]\right) + b\frac{1}{z}X(z)$$

donde hemos supuesto que $x[n]$ es cero para $n < 0$. Notar que esto da

$$y[0] = y_0 = ay[-1], \rightarrow y[-1] = y_0/a$$

Tenemos

$$Y(z) = a\left(\frac{y_0}{a} + \frac{1}{z}Y(z)\right) + \frac{b}{z}X(z)$$

$$Y(z)\left(\frac{z-a}{z}\right) = y_0 + \frac{b}{z}X(z)$$

Finalmente

$$Y(z) = y_0\frac{z}{z-a} + b\frac{X(z)}{z-a}$$

$$Y(z) = y_0\frac{z}{z-a} + b\frac{1}{z}\frac{z}{z-a}X(z)$$

De aquí se obtiene una solución general

$$y[n] = y_0 a^n u[n] + b\left(a^{n-1}u[n-1]\right) * x[n]$$

Se ve que el sistema es estable únicamente si $a < 1$.

b) Si $x[n] = u[n]$, entonces

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

de forma que

$$Y(z) = \frac{b}{z}\left(\frac{z}{z-a}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{ab}{(z-a)(a-1)} + \frac{b}{(1-a)(z-1)}$$

$$Y(z) = \frac{1}{z}\frac{abz}{(z-a)(a-1)} + \frac{1}{z}\frac{bz}{(1-a)(z-1)}$$

De aquí obtenemos la solución

$$y[n] = \frac{ab}{(a-1)}a^{n-1}u[n-1] + \frac{b}{(1-a)}u[n-1]$$

$$y[n] = \frac{b}{1-a}\left(1-a^n\right)u[n-1]$$

c) Ahora resolveremos el problema utilizando la solución general encontrada en a). Teníamos

$$y[n] = y_0 a^n u[n] + b\left(a^{n-1}u[n-1]\right) * x[n]$$

Usando que y_0 y $x[n] = u[n]$

$$y[n] = b\left(a^{n-1}u[n-1]\right) * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ba^{k-1}u[k-1]u[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} ba^{k-1}u[k-1] = \left(\sum_{k=1}^{n} ba^{k-1}\right)u[n-1]$$

Notar que hemos usado que $u[k-1]$ es cero a menos que $k > 1$. Esto significa que todos los términos de la suma en k serán nulos a menos que $n > 1$. Esto explica el factor $u[n-1]$ en la última expresión.

$$y[n] = \frac{b}{a}u[n-1]\sum_{k=1}^{n} ba^k = \frac{b}{a}u[n-1]\frac{a^{n+1}-a}{a-1}$$

$$y[n] = bu[n-1]\frac{a^n-1}{a-1}$$

Por supuesto, es el mismo resultado obtenido elegantemente mediante la transformada Z.

Problema 4

Calcule la siguiente integral para todo n, suponiendo que $a > 1$

$$\int_0^{2\pi} d\epsilon \frac{e^{i(n-1)\epsilon}}{1 - a^{-1}e^{-i\epsilon}}$$

Ayuda: Utilize la definición integral de la transformada Z inversa.

Solución

Tenemos

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma dz F(z) z^{n-1} \quad n > 0$$

donde Γ está contenida en la región de convergencia de F. Si escogemos una circunferencia de radio ρ, entonces la parametrización es la siguiente

$$z = \rho e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad dz = i\rho e^{i\vartheta} d\vartheta$$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta F(\rho e^{i\vartheta}) \rho^n e^{in\vartheta}$$

$$2\pi f[n] = \int_0^{2\pi} d\epsilon F(\rho e^{i\epsilon}) \rho^n e^{in\epsilon}$$

Si escogemos

$$F(z) = \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{a}}$$

cuya transformada inversa es

$$f[n] = \frac{1}{a^n} u[n]$$

entonces

$$\frac{2\pi}{a^n} u[n] = \int_0^{2\pi} d\epsilon \frac{\rho^n e^{in\epsilon}}{1 - a^{-1}\rho^{-1}e^{-i\epsilon}}$$

como la curva de integración debe estar contenida en la ROC, y $a > 1$ implica que el polo de F está dentro del círculo unitario, podemos escoger $\rho = 1$

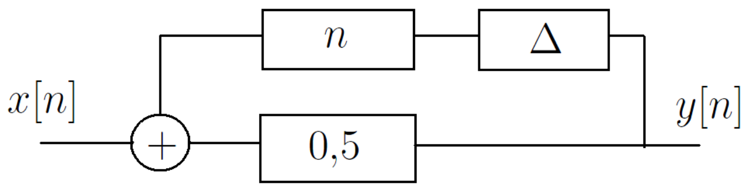
$$\frac{2\pi}{a^n} u[n] = \int_0^{2\pi} d\epsilon \frac{e^{in\epsilon}}{1 - a^{-1}e^{-i\epsilon}}$$

Finalmente, obtenemos el resultado pedido

$$\frac{2\pi}{a^{n-1}} u[n-1] = \int_0^{2\pi} d\epsilon \frac{e^{i(n-1)\epsilon}}{1 - a^{-1}e^{-i\epsilon}}$$

Problema 5

Para el siguiente sistema discreto de la figura



Donde Δ indica un retardo en una unidad de tiempo. Obtenga la respuesta a un impulso ubicado en la posición m. Es el sistema estable? Es invariante?

Solución

Del diagrama de bloques, podemos construír la siguiente ecuación de diferencias

$$y[n] = 0{,}5ny[n-1] + x[n]0{,}5$$

Supongamos que $x[n] = \delta(n-m)$. Si las condiciones iniciales son nulas, entonces es claro que $y[n] = 0$ para $< m$. Ahora bien

$$y[m] = 0{,}5\delta[m] = 0{,}5$$

$$y[m+1] = 0{,}5(m+1)0{,}5 + 0 = 0{,}5^2(m+1)$$

$$y[m+2] = 0{,}5(m+2)0{,}5^2(m+1) = 0{,}5^3(m+2)(m+1)$$

De aquí es claro que

$$y[n] = 0{,}5^{n-m}\frac{n!}{m!}u[n-m]$$

Claramente el sistema es inestable, pues crece como $n!$ ante una entrada de energía finita. La respuesta al impulso es tal que

$$h[0] = 0{,}5$$

$$h[1] = 0{,}5^2$$

$$h[2] = 2 \times 0{,}5^3$$

$$h[3] = 3 \times 2 \times 0{,}5^4$$

En general

$$h[n] = 0{,}5^{n+1}n!u[n]$$

De igual forma crece como bestia, notar que

$$h[n-m] = 0{,}5^{n+1-m}(n-m)!u[n-m] \neq y[n]$$

por lo que no es un sistema invariante. Esto se debe al bloque que multiplica por n.