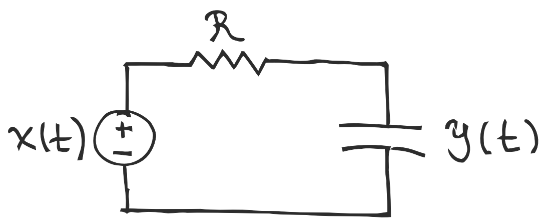
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería

Ayudantía para I1 Análisis de Señales

Fabián Cádiz

Problema 1

Sea un circuito RC como se muestra en la figura. La salida del sistema es el voltaje en el condensador, $y(t)$, y la entrada es un voltaje aplicado $x(t)$.



a) Encuentre la función respuesta al impulso.
b) Calcular la respuesta del sistema a $x_1(t) = u(t - T/2)$ y a $x_2(t) = \sqcap(t/T)$

Solución

a) La ecuación diferencial que rige este sistema puede ser obtenida mediante la ley de mallas

$$-x(t) + Ri(t) + y(t) = 0$$

donde la corriente por el circuito está relacionada con el voltaje en el condensador según

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

Así

$$-x(t) + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) - \frac{1}{RC}x(t) = 0$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden, que puede ser resuelta con el método del factor integrante

$$\frac{dy(t)}{dt}e^{t/RC} + e^{t/RC}\frac{1}{RC}y(t) = e^{t/RC}\frac{1}{RC}x(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{t/RC}\right) = \frac{1}{RC}x(t)e^{t/RC}$$

Integrando

$$y(t) = e^{-t/RC}y_0 + \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\int_0^t d\tau e^{\tau/RC}x(\tau)$$

Donde y_0 representa el valor de la salida en $t = 0$.

$$\boxed{y(t) = e^{-t/RC}y_0 + \frac{1}{RC}\int_0^t d\tau e^{-(t-\tau)/RC}x(\tau)}$$

Para encontrar la respuesta al impulso, resolvemos el problema con $x(t) = \delta(t)$, y $y_0 = 0$, de forma que

$$h(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t d\tau e^{-(t-\tau)/RC}\delta(\tau) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC} \quad t > 0$$

De forma que la respuesta al impulso está dada por

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

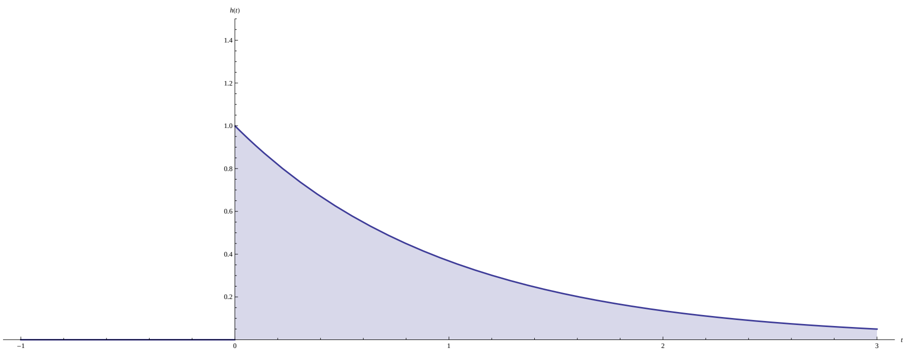


Figura 1: Respuesta al impulso del sistema para $RC = 1$

Nota

Si recuerdan las propiedades básicas de la transformada de Laplace, al tener la ecuación para $h(t)$

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{RC}h(t) - \frac{1}{RC}\delta(t) = 0$$

con $h(0) = 0$, se tiene entonces

$$sH(s) + \frac{1}{RC}H(s) = \frac{1}{RC}$$

$$H(s) = \frac{1}{RC}\frac{1}{(s + 1/RC)}$$

Con lo que es inmediato que la respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

b) Ahora deseamos encontrar $y_1(t)$ en el caso en que $x_1(t) = u(t - T/2)$. Para ello utilizamos la propiedad fundamental de un sistema lineal e invariante

$$y_1(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau h(t-\tau)x(\tau)$$

$$y_1(t) = \int_{T/2}^{t} d\tau h(t-\tau) \qquad t > T/2$$

$$y_1(t) = \frac{1}{RC}\int_{T/2}^{t} d\tau e^{-t/RC}e^{\tau/RC} = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}RCe^{\tau/RC}\Big|_{T/2}^{t}$$

$$y_1(t) = 1 - e^{(T/2-t)/RC} \qquad t > T/2$$

Equivalentemente

$$y_1(t) = \left(1 - e^{(T/2-t)/RC}\right)u(t - T/2)$$

A continuación se muestra $x(t)$ (azul) y la respuesta del sistema (morado), para el caso particular en que $T = 1$, y $RC = 1$. Esto describe la carga de un condensador alimentado con un voltaje continuo

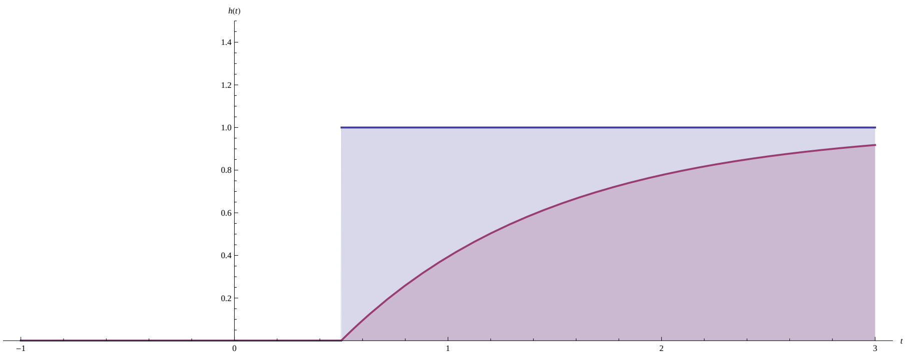


Figura 2: Entrada y salida del sistema

Ahora, veamos que ocurre con $y_2(t)$ cuando $x_2(t) = \sqcap(t/T)$

$$y_2(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}u(t-\tau)\sqcap(\frac{\tau}{T})$$

Recordar que $\sqcap(t/T) = 1$ si $-T/2 < t < T/2$

$$y_2(t) = \frac{1}{RC}\int_{-T/2}^{t} d\tau \sqcap(\tau/T)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}$$

Si $-T/2 < t < T/2$

$$y_2(t) = \frac{1}{RC}\int_{-T/2}^{t} d\tau e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} = e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}\Big|_{-T/2}^{t}$$

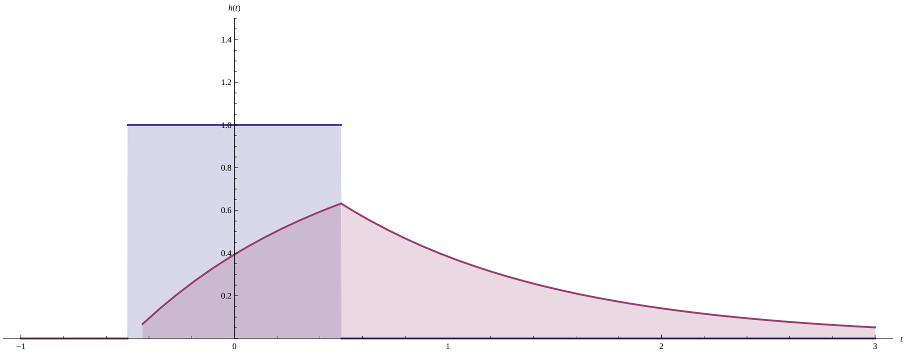
$$y_2(t) = 1 - e^{\frac{-1}{RC}(t+T/2)}, \quad -T/2 < t < T/2$$

En cambio, si $t > T/2$

$$y_2(t) = \frac{1}{RC}\int_{-T/2}^{T/2} d\tau e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} = e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$y_2(t) = e^{-\frac{1}{RC}(t-T/2)} - e^{-\frac{1}{RC}(t+T/2)}, \quad T/2 < t$$

A continuación se ilustra x_2 e y_2



Problema 2

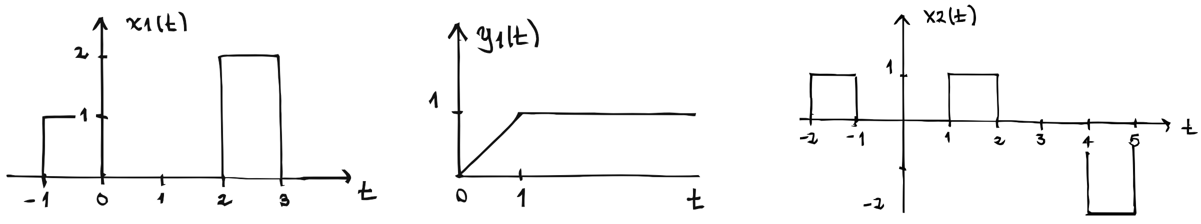
Sea $h(t)$ la función respuesta al impulso de un sistema dinámico lineal e invariante en el tiempo. Entonces, a una entrada $x_1(t)$ corresponde una salida $y_1(t)$

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t)$$

de la misma forma, a una entrada $x_2(t)$ corresponde una salida $y_2(t)$

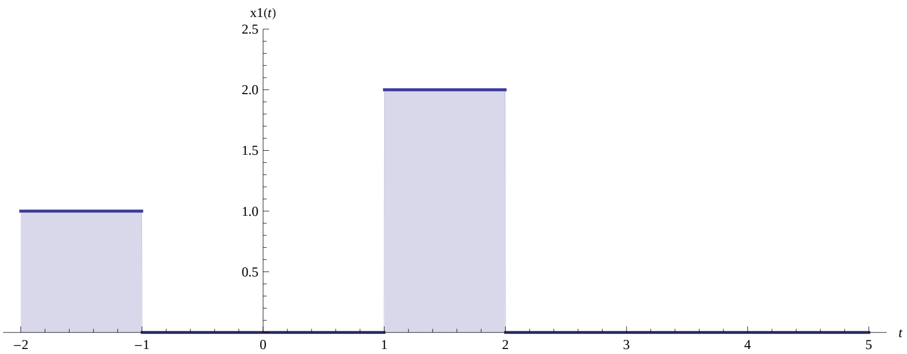
$$y_2(t) = x_2(t) * h(t)$$

Utilizando las propiedades de la operación convolución , y considerando las señales $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$ de la figura, se pide determinar y graficar $y_2(t)$

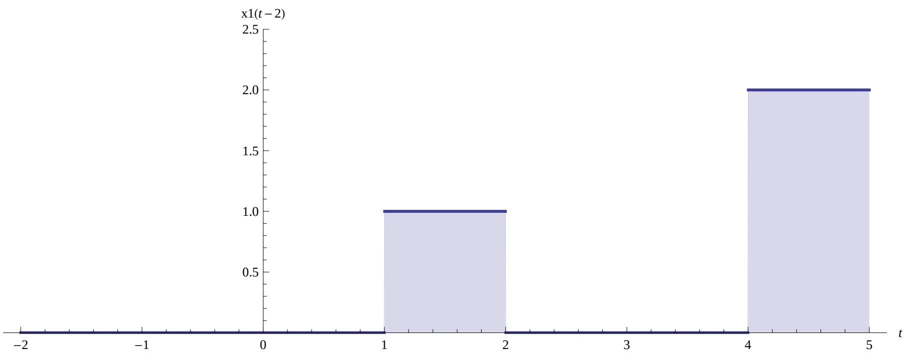


Solución

Primero notemos que si desplazamos la función $x_1(t)$ en la forma $x_1(t+1)$, obtenemos el siguiente gráfico



Del mismo modo, para $x_1(t-2)$ se tiene



De aquí es claro que

$$x_2(t) = x_1(t+1) - x_1(t-2)$$

Entonces

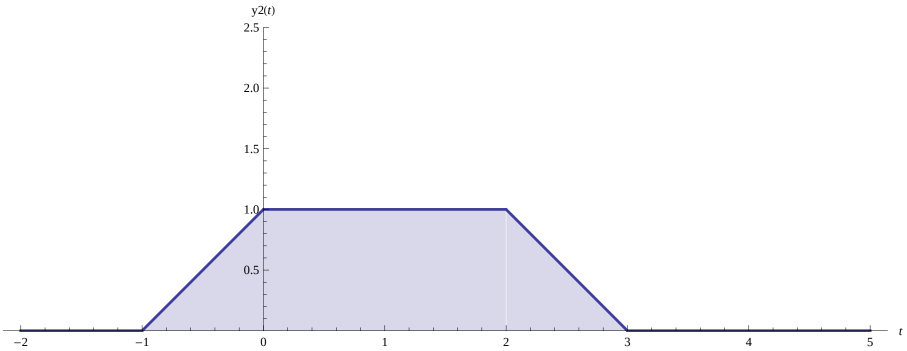
$$y_2(t) = x_2(t) * h(t) = \{x_1(t+1) - x_1(t-2)\} * h(t)$$

$$y_2(t) = x_1(t+1) * h(t) - x_1(t-2) * h(t)$$

Finalmente, utilizando la propiedad de invarianza en el tiempo

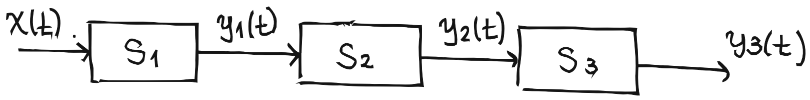
$$y_2(t) = y_1(t+1) - y_1(t-2)$$

El gráfico es el siguiente



Problema 3

En el sistema cascada de la figura, $x(t)$ es un escalón unitario, $y_1(t)$ es la respuesta de un sistema S_1 de primer orden con condición inicial cero y constante de tiempo $T_1 = 2$ segundos. Además, $y_2 = [y_1(t)]^2$, $y_3(t) = y_2(t - T_2)$, con $T_2 = 1$ segundo. Encuentre y grafique $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ para $x(t) = u(t)$



Solución

Tenemos que $x(t) = u(t)$ (Escalón de Heavyside). Sabemos que el sistema S_1 consiste en un sistema de primer orden, es decir, la relación entre $x_1(t)$ e $y_1(t)$ tiene la siguiente forma

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + \beta y_1(t) = \alpha x_1(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Cuya solución general tiene la forma

$$y_1(t) = e^{-\beta t} y_0 + \alpha \int_0^t d\tau e^{-\beta(t-\tau)} x_1(\tau)$$

Para encontrar la respuesta al impulso, imponemos $x_1(t) = \delta(t)$, y $y_0 = 0$

$$h_1(t) = \alpha \int_0^t d\tau e^{-\beta(t-\tau)} \delta(\tau) = \alpha e^{-\beta t}$$

La constante de tiempo es $\frac{1}{\beta} = 2$, de forma que

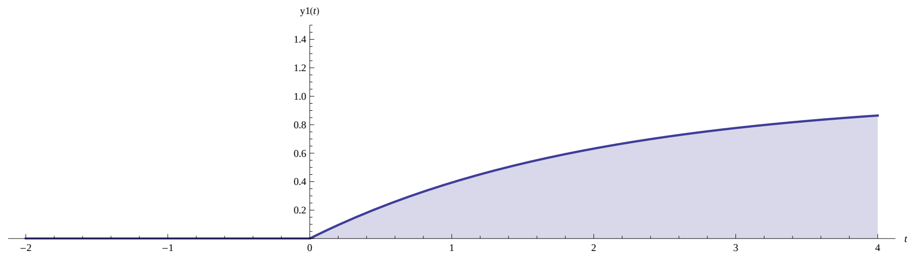
$$h_1(t) = \alpha e^{-t/2} u(\tau)$$

De esta forma, $y_1(t)$ puede ser obtenido convolucionando la respuesta al impulso con $x(t) = u(t)$

$$y_1(t) = h(t) * x_1(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau/2} u(\tau) u(t - \tau)$$

$$y_1(t) = \alpha \int_0^t d\tau e^{-\tau/2} = -2\alpha e^{-\tau/2}\Big|_0^t = 2\alpha \left(1 - e^{-t/2}\right) u(t)$$

El siguiente gráfico muestra la forma de $y_1(t)$, para el caso particular en que $\alpha = \frac{1}{2}$



El sistema S_2 simplemente eleva al cuadrado, es decir

$$y_2(t) = [y_1(t)]^2 = 4\alpha^2 \left(1 - e{-}t/2\right)^2 u(t)$$

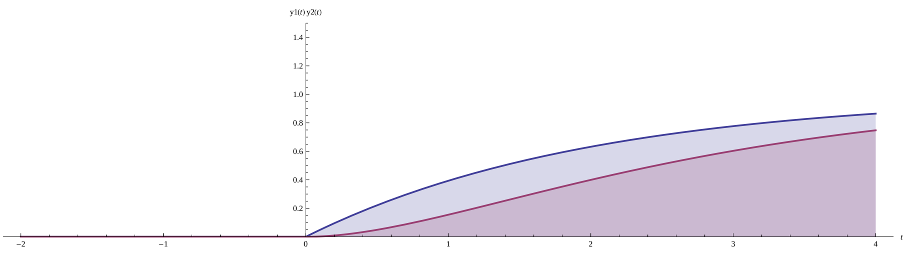
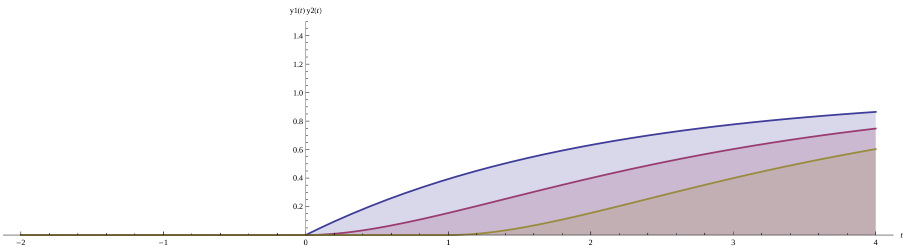


Figura 3: $y_1(t)$ (azul) e $y_2(t)$ (morado)

Finalmente, $y_3(t) = y_2(t-1)$



Problema 4

Considere un sistema discreto lineal e invariante, en donde la relación entre la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ está descrita por la siguiente ecuación de diferencias

$$y[n] = ay[n-1] + bx[n-1], \quad n \geq 1$$

a) Encuentre una expresión cerrada para $y[n]$ en términos de $x[n]$.
b) Encuentre la función respuesta al impulso de este sistema, $h[n]$. ¿Qué se debe cumplir para que el sistema sea estable?
c) Calcule $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$, utilizando la expresión encontrada en a)
d) Verifique que el resultado obtenido en c) coincide con $x[n] * h[n]$

Solución

a) Se tiene

$$\begin{aligned} y[1] &= ay[0] + bx[0] \\ y[2] &= a^2y[0] + abx[0] + bx[1] \\ y[3] &= a^3y[0] + a^2bx[0] + abx[1] + bx[2] \\ y[4] &= a^4y[0] + a^3bx[0] + a^2bx[1] + abx[2] + bx[3] \end{aligned}$$

De aquí se puede encontrar una expresión no recursiva para $y[n]$

$$y[n] = a^n y[0] + b\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k}x[k]$$

b) Para econtrar la respuesta al impulso, calculamos la salida para $x[n] = \delta[n]$, y suponemos condiciones iniciales nulas.

$$h[n] = b\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k}\delta[k] = ba^{(n-1)} = \left(\frac{b}{a}\right) a^n u[n-1]$$

Para que el sistema sea estable, se debe tener una respuesta acotada para una entrada acotada. Esto es equivalente a tener

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|^2 < \infty$$

Es claro que la condición para la estabilidad del sistema es $|a| < 1$, de lo contrario la respuesta al impulso crece indefinidamente. Además, es fácil comprobar que la energía de $h[n]$ en este caso es finita (Es una simple serie geométrica, con razón $a^2 < 1$).

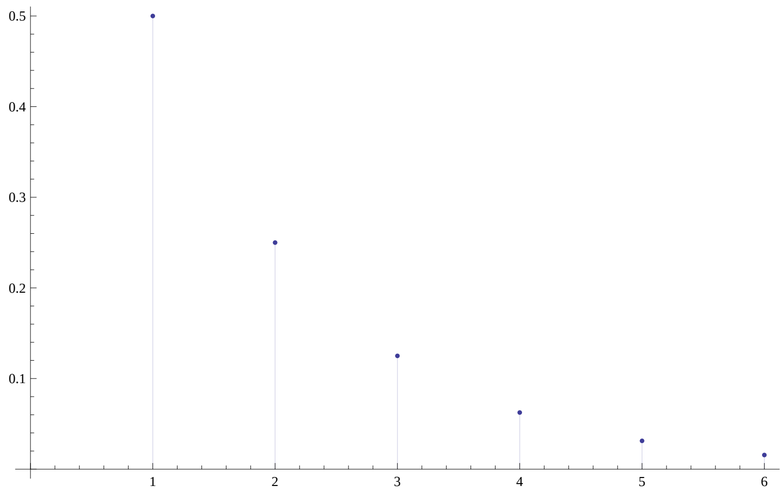


Figura 4: Respuesta al impulso en el caso $b = 1$, $a = 0{,}5$

c) Veamos que ocurre cuando la entrada es $x[n] = u[n]$

$$y[n] = a^n y[0] + b \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} u[k]$$

$$y[n] = a^n y[0] + b \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} u[k]$$

Es claro que $y[0] = 0$, pues el sistema es lineal y la entrada es nula para n menor que cero.

$$y[n] = b \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} = ba^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

$$y[n] = ba^{n-1} \left(\frac{1 - \frac{1}{a^n}}{1 - \frac{1}{a}}\right) = ba^{n-1} \left(\frac{\frac{a^n - 1}{a^n}}{\frac{a-1}{a}}\right)$$

$$y[n] = b \left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) u[n-1]$$

d) Comprobemos ahora que

$$y[n] = h[n] * u[n]$$

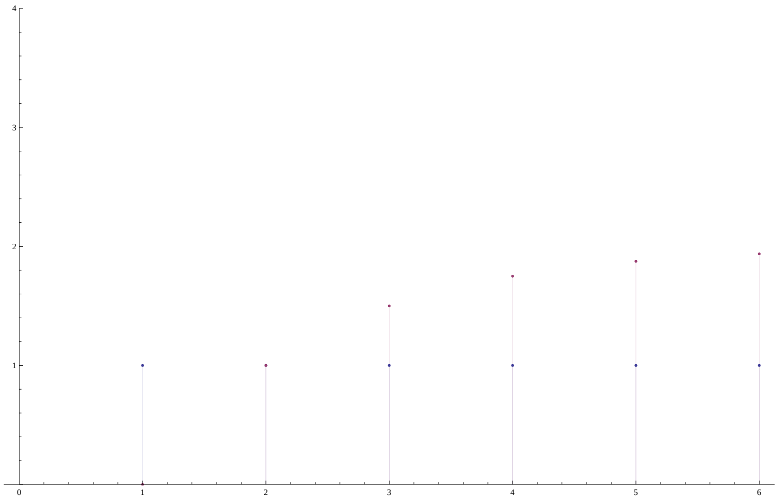
En efecto

$$h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right) a^k u[k-1] u[n-k]$$

$$h[n] * u[n] = \left(\frac{b}{a}\right) \sum_{k=1}^{n} a^k = \left(\frac{b}{a}\right) \left\{\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} - 1\right\}, \quad n \geq 1$$

$$h[n] * u[n] = \left(\frac{b}{a}\right)\left\{\frac{1-a^{n+1}-1+a}{1-a}\right\} = b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)u[n-1]$$

Exactamente el mismo resultado obtenido en c). A continuación se muestra $u[n]$ y la correspondiente salida $y[n]$



Problema 5

Suponga que alguien erróneamente cree que la regla de la cadena se aplica a la convolución

$$(f * g)' = f' * g + f * g'$$

Encuentre el error $e(x)$, la diferencia entre el resultado erróneo y el correcto, si $f(x) = \sqcap(x)$ y $g(x) = u(x)$

Solución

Calculemos en primer lugar $f * g$. Tenemos

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sqcap(\tau) u(x - \tau) = \int_{-\infty}^{x} d\tau \sqcap(\tau)$$

$$f(x) * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1/2 \\ x + 1/2 & \text{si} \quad -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

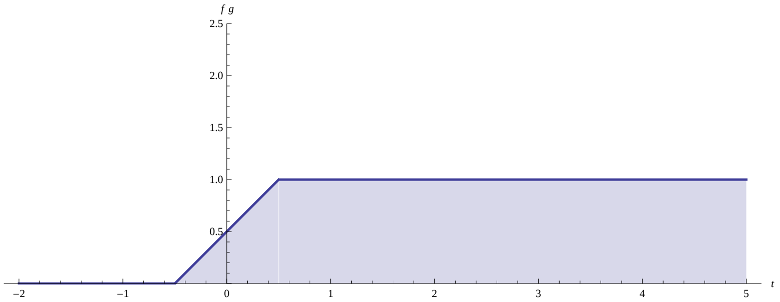


Figura 5: Gráfico de $f * g$

De esta forma

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) * g(x)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1/2 \\ 1 & \text{si} \quad -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases} = \sqcap(x)$$

Por otro lado, calculemos $(f' * g) + (g' * f)$. Para ello, evaluamos

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sqcap(x) = \delta(x - 1/2) - \delta(x + 1/2)$$

(Recordar que $u'(x) = \delta(x)$, y $\sqcap(x) = u(x - 1/2) - u(x + 1/2)$). Además

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\breve{\ }(x) = \delta(x)$$

Entonces

$$(f' * g) + (g' * f) = \delta(x - 1/2) * u(x) - \delta(x + 1/2) * u(x) + \delta(x) * \sqcap(x)$$

$$(f' * g) + (g' * f) = \underbrace{u(x - 1/2) - u(x + 1/2)}_{\sqcap(x)} + \sqcap(x) = 2 \sqcap(x)$$

Finalmente, el error que se comete es
$e(x) = \sqcap(x)$