Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIZ0322 Física Cuántica I

Ayudantía 7: Espacios de Hilbert

Fabián Cádiz

0.1. Espacios vectoriales normados

0.1.1. Norma

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (o bien sobre $\mathbb{R}$). Se llama **norma** en E a toda función $\| \ \| : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ que cumple:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{E}, \quad \|x\| = 0 \text{ ssi } \ x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall\, x \in \mathrm{E}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \ \in \mathrm{E}$

El par $(\mathrm{E}, \| \ \|)$ se llama espacio vectorial normado.

Notas
Algunos ejemplos de espacios vectoriales normados son:

1. $\mathbb{R}^n$, con la norma euclídea $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$.
2. De forma ánaloga, $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$.
3. El espacio $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y $\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p}$, con $p \geq 1$ es norma sobre $C([a,b])$.
4. El espacio de las funciones $L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty \right\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, además $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} dx |f|^2 \right)^{1/2}$ es una norma en $L^2[a,b]$.

0.1.2. Sucesiones y convergencia

Un espacio vectorial normado permite definir una distancia entre 2 de sus elementos $x, y \in$ E, a través de:

$$d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$$

Esta función d así definida cumple todas las propiedades de una métrica en E.

Al existir la noción de distancia entre 2 elementos cualesquiera, se puede hablar de convergencia: se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de E converge a $x \in$ E, y escribiremos $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \quad \rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon$$

Esto equivale a que la sucesión de elementos de $\mathbb{R}$, $\|x_n - x\|$ tiende a cero.

0.1.3. Sucesiones de Cauchy y completitud

Decimos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy si $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n, m \geq N_0, \quad \rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

Esto equivale a $\lim_{(n,m)\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$ Una sucesión convergente es de cauchy, pero el recíproco no se cumple necesariamente. Un espacio vectorial normado $(E, \| \ \|)$ se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy de elementos de E, converge en E.

Notas

1. En el espacio $E = C([-1,1])$ con la norma $\|f\| = \int_{[-1,1]} dx\ |f(x)|$, se define la sucesión :

$$f_n = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq -1/n \\ nx & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & 1/n \leq x \end{cases}$$

Se puede demostrar que f_n es una sucesión de cauchy en E. La función definida por $f : 1$ si $x > 0$ y -1 si $x < 0$ cumple con:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = \lim_{n\to\infty} 2 \int_0^{1/n} dx\ |1 - nx| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

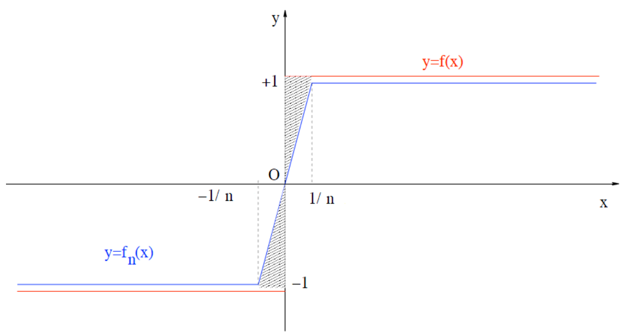

Figura 1: La distancia $\|f_n - f\|$ entre la sucesión f_n y f es el área achurada, que tiende a cero a medida que n aumenta.

Sin embargo, $f \notin C([-1,1])$, la sucesión f_n no converge. $C([-1,1])$ con esta norma no es un espacio completo.

2. El espacio vectorial de los números reales $\mathbb{R}$ con la norma del valor absoluto es un espacio completo: toda sucesión de cauchy de números reales es convergente.

0.2. Espacios pre-hilbertianos

0.2.1. Producto escalar

Sea un espacio vectorial H sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) . Un producto escalar (,) es una aplicación $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall\, x \in \mathrm{H},\, (x, x) \geq 0$ y $(x, x) = 0 \leftrightarrow x \equiv 0$ definido positivo
2. $\forall\, x, y \in \mathrm{H},\, (x, y) = (y, x)^*$ hermiticidad
3. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall\, x, y, z \in \mathrm{H},\, (x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$ lineal en el segundo argumento
4. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall\, x, y, z \in \mathrm{H},\, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha^*(x, z) + \beta^*(y, z)$ antilineal en el primer argumento

Un espacio vectorial con producto escalar se llama espacio pre-hilbertiano. El está canónicamente provisto de una estructura de espacio vectorial normado definiendo:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Notas

1. En un espacio vectorial de dimensión finita, (por ejemplo $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) los vectores se pueden representar por matrices columnas:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

donde u_i y $v_i \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$). El producto escalar se escribe simplemente:

$$(v, u) = \sum_{i=1}^{n} v_i^* u_i$$

2. En el espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$ (de dimensión infinita), el producto escalar de ψ_1 con ψ_2 es:

$$(\psi_2, \psi_1) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\ \psi_2(\vec{x})^* \psi_1(\vec{x})$$

0.2.2. Ortogonalidad y desigualdad de Cauchy-Schwarz

Se dice que dos elementos de un espacio prehilbertiano H son ortogonales si su producto escalar es nulo:

$$(x, y) = 0 \to x, y \ \text{ son ortogonales}$$

Además, se puede demostrar que en un espacio prehilbertiano se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|(x, y)| \leq \|x\|\, \|y\|$$

0.3. Espacios de Hilbert

Un espacio prehilbertiano H que es completo respecto a la norma inducida por el producto escalar, es un espacio de Hilbert. Es decir, toda sucesión de cauchy converge en H. En mecánica cuántica trabajaremos con este tipo de espacios normados. En particular, $L^2(\mathbb{R}^3)$ con la norma:

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \ f^*(\vec{x})f(x)}$$

es un espacio de Hilbert.

0.3.1. Criterio de totalidad

Sea H un espacio de Hilbert y $A \subset$ H. Se define Vect(A) al espacio vectorial engendrado por A, es decir al conjunto de elementos $h \in$ H que son combinación lineal de elementos de A:

$$h = \sum_{i=1}^{N} \lambda_j a_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \ \ a_j \in A$$

Se dice que un subconjunto A del espacio de Hilbert H es total si Vect(A) es denso en H.

0.3.2. Def: espacio separable

Se dice que un espacio de hilbert H es separable si existe una sucesión numerable $a_1, a_2, ...$ de elementos de H que constituye un subconjunto completo de H. Esta condición se satisface para los espacios de Hilbert que uno utiliza en la práctica.

0.3.3. Bases hilbertianas

Sea H un espacio de Hilbert separable. Se llama base hilbertiana (o base ortonormal) de H una sucesión finita o infinita $\{\hat{e}_j\}$, $j = 1, 2, ...$ que constituye un sistema completo en H y que verifica las relaciones de ortonormalidad:

$$(\hat{e}_j, \hat{e}_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad j = k \\ 0 & \text{para} \quad j \neq k \end{cases}$$

En todo espacio de Hilbert separable, existen bases hilbertianas.

0.4. Operadores lineales

Consideremos un espacio de Hilbert H, y un operador denifido sobre H en sí mismo. Es decir $\hat{A}$: H $\rightarrow$ H. Decimos que $\hat{A}$ es lineal si $\forall \ x, y \ \in$ E, $\ \forall \ \lambda \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\hat{A}(x + \lambda y) = \hat{A}x + \lambda \hat{A}y$$

Un operador es acotado si $\exists \ M > 0$ tal que $\forall \ x \in$ E, $\left\|\hat{A}x\right\| \leq M \|x\|$. Un operador es acotado si y sólo si es continuo.

0.4.1. Operadores adjuntos y operadores autoadjuntos

Sea $\hat{A}$ un operador lineal actuando sobre H. Existe un único operador, llamado adjunto (o conjugado hermítico) de $\hat{A}$, notado $\hat{A}^\dagger$ que verifica para todo par f, g de elementos de H:

$$(\hat{A}^\dagger f, g) = (f, \hat{A} g)$$

Un operador $\hat{A}$ es autoadjunto o hermítico si:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

Si $\hat{A}$ es autodajunto, entonces el valor medio del observable $\hat{A}$, definido por : $\langle a \rangle = (\psi, \hat{H}\psi)$ es real:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad \rightarrow \langle a \rangle = \langle a \rangle^*$$

0.4.2. Operadores en espacios de dimensión finita

Si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita, todo operador lineal $\hat{A}$ puede representarse a través de una matriz cuadrada $n \times n$. En efecto, todo elemento v de H se puede expresar en una base ortonormal de la siguiente manera:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \hat{e}_i$$

De manera que:

$$\hat{A}v = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \hat{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \hat{A}\hat{e}_i \tag{1}$$

Por otro lado, sea la matriz $[A] = A_{ij}$, entonces:

$$[A]v = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ki} v_i \hat{e}_k \tag{2}$$

Para que $[A]$ sea una representación matricial de $\hat{A}$, los vectores definidos al lado derecho de las ecuaciones 1 y 2 deben ser idénticos. Esto significa que cada una de sus componentes en la base $\{\hat{e}_n\}$ deben ser iguales:

$$(\hat{e}_j, \hat{A}v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\hat{e}_j, \hat{A}\hat{e}_i\right)$$

$$(\hat{e}_j, [A]v) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ki} v_i \left(\hat{e}_j, \hat{e}_k\right) = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\hat{e}_j, \hat{A}\hat{e}_i\right)$$

Se ve entonces que el operador lineal $\hat{A}$ puede ser representado por una matriz cuyos elementos vienen dados por:

$$A_{ij} = (\hat{e}_i, \hat{A}\hat{e}_j)$$

0.4.3. Propiedades de operadores autoadjuntos

Si $\hat{A}$ es un operador autoadjunto, su espectro (conjunto de valores propios) pertenece a $\mathbb{R}$. Además, si f_1 y f_2 son dos vectores propios relativos a dos valores propios distintos, son ortogonales.

Si $\hat{A}$ es un operador autoadjunto en un espacio de hilbert H de dimensión finita, existe una base ortonormal de H formada por vectores propios de $\hat{A}$.

0.5. Operadores no acotados

Un operador no acotado $\hat{A}$ en un espacio de Hilbert $\hat{H}$ se define mediante un subespacio vectorial de $\hat{H}$, notado $D(A)$, y que es llamado dominio de $\hat{A}$, y una aplicación lineal, notada también $\hat{A}$ de $D(A)$ en $\hat{H}$. En la práctica, nos interesarán únicamente los operadores cuyos dominios $D(A)$ son densos en $\hat{H}$. Si el operador es acotado, es decir, si existe C tal que $\left\|\hat{A}f\right\| \leq C \left\|f\right\|$, se puede entonces prolongar de manera única en un operador continuo de $\hat{H}$ en sí mismo.

Para un operador $\hat{A}$ no acotado a dominio denso, decimos que u pertenece a $D(A^\dagger)$ si existe $g \in$ H tal que:

$$\forall v \in D(A) \quad (u, \hat{A}v) = (g, v)$$

El elemento en cuestión g es único y se escribe como $\hat{A}^\dagger u$. Se dice que un operador no acotado a dominio denso es autoadjunto si $D(\hat{A}^\dagger) = D(A)$ y si, para todo $u \in D(A)$, se tiene $\hat{A}u = \hat{A}^\dagger u$. Esta propiedad implica inmediatamente, por definición de $\hat{A}^\dagger$ que:

$$(\hat{A}u, v) = (u, \hat{A}v) \quad u \in D(A), v \in D(A) \tag{3}$$

pero es más fuerte. En efecto, un operador $\hat{A}$ que satisface (3) se dice simétrico, y puede ser tal que $D(A^\dagger)$ sea estrictamente más grande que $D(A)$. No existe una buena teoría espectral para los operadores simétricos, pero si la hay para operadores autoadjuntos.

Problema 1: Matrices hermíticas

Demuestre que en dimensión finita, un operador $\hat{A}$ es hermítico si y sólo si su matriz $[A_{ij}]$ en una base ortonormal verifica $A_{ij} = A_{ji}^*$.

Solución

Supongamos que $\hat{A}$ es un operador hermítico, de forma que verifica $\forall\, u, v \in$ H:

$$(v, \hat{A}u) = (\hat{A}v, u)$$

En particular, tomando $v = \hat{e}_i$, $u = \hat{e}_j$:

$$(\hat{e}_i, \hat{A}\hat{e}_j) = (\hat{A}\hat{e}_i, \hat{e}_j) = (\hat{e}_j, \hat{A}\hat{e}_i)^*$$

Esto último significa:

$$A_{ij} = A_{ji}^*$$

Ahora supongamos que la matriz $[A]$ representa a un operador $\hat{A}$ y que verifica $A_{ij} = A_{ji}^*$. De esta forma, para todo par de elementos u, v de H:

$$(v, \hat{A}u) = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \left(\hat{A}u\right)_i$$

pero $\hat{A}u = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{jk} u_k \hat{e}_j$:

$$(v, \hat{A}u) = \sum_{i=1}^{n} v^{i*} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} u_k$$

Finalmente:

$$(v, \hat{A}u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_k A_{ik} v^{i*} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_k^* A_{ik}^* v^i \right)^*$$

y dado que $A_{ik}^* = A_{ki}$:

$$(v, \hat{A}u) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_k^* A_{ki} v^i \right)^* = \left(u, \hat{A}v\right)^*$$

Finalmente:

$$(v, \hat{A}u) = (\hat{A}v, u)$$

y por lo tanto $\hat{A}$ es un operador hermítico.

Problema 2: Completitud de un espacio euclídeo dimensión finita

Pruebe que toda sucesión de Cauchy en un espacio pre-hilbert de dimensión finita converge. Es decir, todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es de Hilbert.

Solución

Sea v_n una sucesión de elementos de un espacio vectorial pre-hilbertiano E de dimensión finita r. Para cada $n \in \mathbb{N}$, uno puede descomponer v_n en términos de una base ortonormal:

$$v_n = \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{nr} \end{pmatrix}$$

Como v_n es una sucesión de cauchy, para todo $\epsilon > 0$, siempre existe N tal que si $p, m > N$, se tiene:

$$\|v_p - v_m\| < \epsilon$$

$$\|v_p - v_m\| = \sqrt{(v_p - v_m, v_p - v_m)} < \epsilon$$

Es decir:

$$\sum_{i=1}^{r} |v_{pi} - v_{mi}|^2 < \epsilon^2$$

Esto significa que cada término dentro de la suma es menor que ϵ. Es decir, para cada $\{i = 1, ..., r\}$, $p, m > N$ implica:

$$|v_{pi} - v_{mi}| < \epsilon$$

La sucesión $\{v_{ni}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es entonces una sucesión de cauchy de elementos de $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}$ es completo, v_{ni} converge a $v_i \in \mathbb{R}$. Proponemos entonces el vector límite:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

cuya norma es finita. Luego, para $\epsilon > 0$, se sabe que existe $N_{0i} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > N_{0i} \to |v_{in} - v_i| < \epsilon, \quad i = 1, ..., r$$

Tomemos entonces $N_0 = \text{máx}_{i=1,...,r} \{N_{0i}\}$ (note que esto no es evidente si la dimensión no es finita), de esta manera, si $n > N_0$:

$$\|v_n - v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} |v_{ni} - v_i|^2} < \epsilon$$

Luego se ha demostrado que v_n converge a $v \in$ E, y por lo tanto E es completo. Notar que si el espacio fuera de dimensión infinita, aún cuando cada límite u_i fuera finito, nada garantiza que $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty$

Problema 3: Sucesiones en espacios de Hilbert

Demuestre el siguiente teorema: Sea H un espacio de Hilbert, y $\{u_j\}$ una sucesión de elementos de H .
a) Si la serie de término general es normalmente convergente (es decir $\sum_0^\infty \|u_j\| < \infty$), entonces la serie $\sum_0^\infty u_j$ converge en H.
b) Suponga que los u_j son ortogonales dos a dos. Para que la serie $\sum_0^\infty u_j$ sea convergente, es necesario y suficiente que la serie $\sum_0^\infty \|u_j\|^2$ sea convergente. Se tiene entonces

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} u_j\right\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|u_j\|^2$$

Solución
a) Denotemos por $S_N = \sum_{j=0}^\infty u_j$. Para demostrar que ésta serie converge, basta demostrar que es de cauchy (H es un espacio de Hilbert). Si P y Q son dos enteros, con $Q < P$, entonces:

$$\|S_P - S_Q\| = \left\|\sum_{Q+1}^{P} u_j\right\| \leq \sum_{Q+1}^{P} \|u_j\| \leq \sum_{Q+1}^{\infty} \|u_j\|$$

El miembro de la derecha es el resto (de rango Q) de una serie convergente (por hipótesis), y tiende entonces a cero para $Q \to \infty$. Se tiene entonces:

$$\lim_{P,Q\to 0} \|S_P - S_Q\| \to 0$$

lo que muestra que la sucesión S_N es de cauchy, y por lo tanto converge.

b) Supongamos que la serie $S = \sum_{j=0}^\infty u_j$ converge, y sea $S_N = \sum_{j=0}^N u_j$. Como los u_j son ortogonales dos a dos, entonces:

$$\sum_{j=0}^{N} \|u_j\|^2 = \left\|\sum_{j=0}^{N} u_j\right\|^2 = \|S_N\|^2$$

Por continuidad de la norma, $\lim_{N\to\infty} \|S_N\|^2 = \|S\|^2$, y entonces la serie numérica $\sum_{j=0}^\infty \|u_j\|^2$ converge.

Recíprocamente, si esta serie numérica converge, se tiene:

$$\|S_{N+P} - S_N\|^2 = \sum_{N+1}^{N+P} \|u_j\|^2 \leq \sum_{N+1}^{\infty} \|u_j\|^2$$

Siendo el miembro de la derecha el resto de orden N de una serie numérica convergente, tiende a 0 cuando $N \to \infty$. Esto asegura que la sucesión S_N es de cauchy en H, y por lo tanto convergente.

Problema 4: Coeficientes de Fourier y Bessel-Parseval

Sea H un espacio de Hilbert separable, y $\{\hat{e}_j\}$, $j = 1, 2, ...$ una base hilbertiana de H. Demuestre que:

a) Todo elemento $f \in$ H se puede descomponer de forma única bajo la forma de una serie convergente en H:

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f)\hat{e}_j \quad c_j(f) \in \mathbb{C}$$

Las componentes de $c_j(f)$ son llamadas coefientes de Fourier y están dadas por:

$$c_j(f) = (\hat{e}_j, f)$$

y verifican:

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|c_j(f)\|^2 \quad \text{Bessel-Parseval}$$

b) Recíprocamente, dados escalares γ_j que verifican $\sum_j |\gamma_j|^2 \leq \infty$, la serie $\sum_j \gamma_j \hat{e}_j$ converge en H y su suma f verifica $c_j(f) = \gamma_j$ para todo j.

Solución

a) Sea $f \in$ H, y definimos:

$$c_j(f) = (\hat{e}_j, f)$$

y

$$f_N = \sum_{j=1}^{N} c_j(f)\hat{e}_j$$

Se tiene entonces:

$$(f_N, f) = \sum_{j=1}^{N} c_j(f)^*(\hat{e}_j, f) = \sum_{j=1}^{N} |c_j(f)|^2 = \|f_N\|^2$$

La última igualdad se obtiene considerando que los $c_j(f)\hat{e}_j$ son ortogonales dos a dos ($\sum_j \|c_j(f)\hat{e}_j\|^2 = \sum_j |c_j(f)|^2 = \left\|\sum_j c_j(f)\hat{e}_j\right\|^2$). Se tiene entonces:

$$\|f_N\|^2 = (f_N, f) \leq \|f\| \, \|f_N\| \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

Es decir:

$$\|f_N\| \leq \|f\|$$

Luego $\|f_N\|^2$ está mayorada para todo N por $\|f\|^2$, y entonces la serie $\sum |c_j(f)|^2$ es convergente. Por el teorema visto en el problema 3 (parte b), se tiene entonces que $\sum c_j(f)\hat{e}_j$ converge a un elemento g de H.

Se puede mostrar que necesariamente $g = f$ considerando que para todo j,

$$(\hat{e}_j, g - f) = \lim_{N\to\infty} (\hat{e}_j, f_N) - (\hat{e}_j, f) = c_j(f) - c_j(f) = 0$$

(Continuidad del producto escalar). Luego, como $g - f \in H$, y $\{\hat{e}_j\}$ es una base hilbertiana, existe una sucesión $h_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \hat{e}_k$ que converge a $g - f$, luego:

$$(g - f, g - f) = \lim_{n\to\infty} (g - f, h_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k (g - f, \hat{e}_k) = 0$$

Luego $\|g - f\| = 0$ y $f = g$. Además:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j(f)|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j(f) \hat{e}_j \right\|^2 = \|f\|^2$$

ya que $\|f - f_N\|^2 \geq \|f\| - \|f_N\|$, luego: $(\|f\| - \|f_N\|)^2 \leq \|f - f_N\|^2$, el último término converge a cero, y entonces $\|f_N\|^2 \to \|f\|^2$.

b) Siendo los $\gamma_j \hat{e}_j$ ortogonales dos a dos, y dado que $\sum_j \|\gamma_j \hat{e}_j\|^2 = \sum_j |\gamma_j|^2 < \infty$, entonces por el teorema del problema 3 b, la serie:

$$\sum_j \gamma_j \hat{e}_j$$

es convergente. Si la serie converge a una función f en H, por continuidad del producto escalar:

$$\lim_{N\to\infty} (\hat{e}_k, \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \hat{e}_j) = (\hat{e}_k, f)$$

Pero el miembro derecho es igual a γ_k una vez que N es superior a k. Esto termina por mostrar que la descomposición es única.

Problema 5: Principio de incertidumbre general

Sea H un espacio prehilbertiano, y $\hat{A}$, un operador hermítico. Sea $\psi \in$ H tal que $\|\psi\| = 1$, se define:

$$\Delta a_{\psi} = \sqrt{(\psi, \hat{A}^2\psi) - (\psi, \hat{A}\psi)^2}$$

Demuestre que si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son dos operadores hermíticos, se cumple:

$$\Delta a_{\psi}\Delta b_{\psi} \geq \frac{1}{2}|(\psi, [\hat{A}, \hat{B}]\psi)| \quad \forall\, \psi \in \mathrm{H}$$

Solución

Sea $\psi \in$ H, y consideremos los operadores:

$$\hat{A}' = \hat{A} - (\psi, \hat{A}\psi)$$

$$\hat{B}' = \hat{B} - (\psi, \hat{B}\psi)$$

Notar que ambos son igualmente hermíticos, por ejemplo:

$$\hat{A}'^{\dagger} = \left(\hat{A} - (\psi, \hat{A}\psi)\mathbb{1}\right)^{\dagger} = \hat{A}^{\dagger} - (\psi, \hat{A}\psi)^{*}\mathbb{1}$$

y ya que $\hat{A}$ es hermítico, $\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$ y $(\psi, \hat{A}\psi)$ es real. Se sigue que $\hat{A}'$ es un operador hermítico (mismo razonamiento para $\hat{B}'$). Además:

$$\hat{A}'^2 = \hat{A}^2 - 2(\psi, \hat{A}\psi)\hat{A} + (\psi, \hat{A}\psi)^2$$

y luego:

$$(\psi, \hat{A}'^2\psi) = (\psi, \hat{A}^2\psi) - 2(\psi, \hat{A}\psi)(\psi, \hat{A}\psi) + (\psi, \hat{A}\psi)^2(\psi, \psi)$$

$$(\psi, \hat{A}'^2\psi) = (\psi, \hat{A}^2\psi) - (\psi, \hat{A}\psi)^2 = \Delta a_{\psi}^2$$

De igual forma, para $\hat{B}'$:

$$(\psi, \hat{B}'^2\psi) = \Delta b_{\psi}^2$$

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{R}$, y consideremos la norma del vector $(\hat{A}' + i\lambda\hat{B}')\psi$:

$$\left\|\left(\hat{A}' + i\lambda\hat{B}'\right)\psi\right\|^2 = \left((\hat{A}' + i\lambda\hat{B}')\psi, (\hat{A}' + i\lambda\hat{B}')\psi\right)$$

Utilizando el hecho de que el producto escalar es lineal en el segundo argumento y antilineal en el primero:

$$\left\|\left(\hat{A}' + i\lambda\hat{B}'\right)\psi\right\|^2 = (\hat{A}'\psi, \hat{A}'\psi) + i\lambda(\hat{A}'\psi, \hat{B}'\psi) - i\lambda(\hat{B}'\psi, \hat{A}'\psi) + \lambda^2(\hat{B}'\psi, \hat{B}'\psi)$$

Ahora usemos el hecho de que $\hat{A}'$ y $\hat{B}'$ son hermíticos. Se tiene:

$$(\hat{A}'\psi, \hat{A}'\psi) = (\psi, \hat{A}'^{\dagger}\hat{A}'\psi) = (\psi, \hat{A}'^2\psi)$$

$$i\lambda(\hat{A}'\psi, \hat{B}'\psi) - i\lambda(\hat{B}'\psi, \hat{A}'\psi) = i\lambda\left((\psi, (\hat{A}'\hat{B}' - \hat{B}'\hat{A}')\psi)\right)$$

$$(\hat{B}'\psi, \hat{B}'\psi) = (\psi, \hat{B}'^2\psi)$$

y entonces:

$$\left\|\left(\hat{A}' + i\lambda\hat{B}'\right)\psi\right\|^2 = \Delta a_\psi^2 + \lambda(\psi, i[\hat{A}', \hat{B}']\psi) + \lambda^2\Delta b_\psi^2 \tag{4}$$

Notar que el término del medio es real, ya que el operador $i[\hat{A}', \hat{B}']$ es hermítico, en efecto:

$$(i[\hat{A}', \hat{B}'])^\dagger = i^*(\hat{A}'\hat{B}' - \hat{B}'\hat{A}')^\dagger = -i(\hat{B}'^\dagger\hat{A}'^\dagger - \hat{A}'^\dagger\hat{B}'^\dagger) = -i([\hat{B}', \hat{A}']) = i[\hat{A}', \hat{B}']$$

. Por lo tanto, siendo la expresión 4 la norma de un vector, es mayor o igual a cero (y esto $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$). Esto significa que la parábola en λ posee raíces imaginarias o 1 sola raíz real, equivalentemente:

$$(\psi, i[\hat{A}', \hat{B}']\psi)^2 - 4\Delta b_\psi^2\Delta a_\psi^2 \leq 0$$

$$\Delta a_\psi \Delta b_\psi \geq \frac{1}{2}|(\psi, i[\hat{A}', \hat{B}']\psi)|$$

Pero es fácil ver que:

$$[\hat{A}', \hat{B}'] = [\hat{A} - (\psi, \hat{A}\psi), \hat{B} - (\psi, \hat{B}\psi)] = [\hat{A}, \hat{B}]$$

Finalmente se obtiene:

$$\Delta a_\psi \Delta b_\psi \geq \frac{1}{2}|(\psi, i[\hat{A}, \hat{B}]\psi)|$$

En particular, en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$, donde los operadores posición y momentum satisfacen:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

se obtiene el principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x_\psi \Delta p_\psi \geq \frac{\hbar}{2}\|\psi\|^2 = \frac{\hbar}{2}$$

Es decir, dada cualquier función de onda, las incertidumbres satisfacen:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Hemos visto que esto se generaliza para cualquier par de operadores que no conmutan (y en cualquier espacio de Hilbert!), dos cantidades físicas asociadas a dos operadores que no conmutan no pueden ser determinadas simultáneamente con precisión arbitraria. Tremendo!.

0.6. Algunos ejemplos importantes en física

0.6.1. Series de Fourier

Las funciones $e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ikwt}$, $k \in \mathbb{Z}$, con $w = 2\pi/T$ forman una base hilbertiana ortonormal de $L^2([0,T])$. Todo elemento f de $L^2([0,T])$ puede descomponerse de forma única bajo:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{inwt} \tag{5}$$

donde:

$$c_n(f) = (e_n, f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T dt \; f(t) e^{-ipwt}$$

y se verifica Bessel-Parseval:

$$\|f\|^2 = \int_0^T dt |f(t)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Se debe notar que la igualdad (5) indica que la serie es convergente en norma a f, no se debe interpretar como una igualdad para todo $x \in [0,T]$. Formalmente quiere decir que:

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ikwt} - f \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^T dt \left| \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ikwt} - f \right|^2 = 0$$

0.6.2. Polinomios de Legendre

Dado un intervalo acotado $[a,b]$, se considera el espacio de Hilbert $L^2([a,b])$. El espacio de los polinomios es denso, y la sucesión de polinomios $1, x, x^2, x^3, ...$ constituye un sistema total. El procedimiento de ortonormalización de Schmidt permite construír una base ortonormal $\{P_k\}$, $k = 0, 1, ...$ de $L^2([a,b])$ tal que cada P_k es un polinomio de grado exactamente k. Estos son los polinomios de Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n]$$

0.6.3. Funciones de Hermite

Se trata de una base de $L^2(\mathbb{R})$ que juega un rol importante en el estudio del oscilador armónico. Demostrando que el conjunto $x^k e^{-x^2/2}$ con $k \in \mathbb{N}$ forma un sistema total, el proceso de ortonormalización permite de deducir una base hilbertiana formada por las funciones de Hermite:

$$\phi_n(x) = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

donde H_n son los polinomios de Hermite, definidos mediante:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

0.6.4. Funciones de Laguerre

Se trata de una base hilbertiana de $L^2([0,\infty[)$, constituída por las funciones:

$$\mathscr{L}_k = e^{-x/2} L_k(x) \ ; \qquad L_k(x) = \frac{e^x}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-x}x^k\right)$$

donde los L_k son los polinomios de Laguerre, de grado exactamente igual a k.