



Ayudantía 15: Spin

Fabián Cádiz

0.1. La experiencia de Stern y Gerlach

Se envía un jet de átomos de velocidad bien definida a una zona donde reina un campo magnético inhomogéneo dirigido según una dirección z ortogonal a la velocidad inicial de los átomos (Ver Fig. 0.1). Se mide la desviación eventual de los átomos por el gradiente del campo magnético observando el impacto de los átomos sobre una pantalla ortogonal a la dirección inicial del jet atómico.

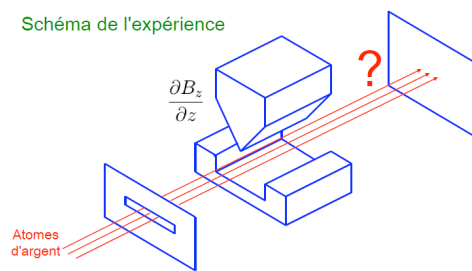


Figura 1: Principio de la experiencia

0.1.1. Análisis clásico

Razonemos primero en el cuadro de la mecánica clásica. Los átomos son neutros, luego ellos no se encuentran sometidos a la fuerza de Lorentz. Sin embargo, si ellos poseen un momento magnético $\vec{\mu}$, ellos sentirán en la zona donde reina el gradiente de campo magnético una fuerza paralela a z :

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Este es un resultado conocido de la mecánica clásica y de la magnetostática: cuando un momento magnético $\vec{\mu}$ se coloca en un campo magnético \vec{B} , la energía de interacción se escribe:

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

y se ejerce un torque

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

sobre el momento magnético. Más aun, si el campo magnético es inhomogéneo, el momento magnético se encuentra sometido a una fuerza:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\mu \cdot \vec{B}) = \sum_{i=x,y,z} \mu_i(t) \vec{\nabla} B_i \quad (1)$$

Podemos utilizar un modelo clásico para un átomo (hidrogenoide para simplificar), considerando una partícula de masa m_e y de carga $-q$ (electrón) en rotación uniforme a velocidad v sobre un círculo de radio r centrado sobre una carga $+q$ que representa al núcleo, y se supone mucho más pesada que el electrón (Ver Fig 0.1.1).

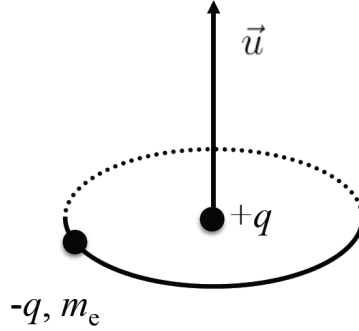


Figura 2: Una carga $-q$ orbitando al núcleo posee un momento magnético.

El momento angular de este sistema respecto al centro de la órbita electrónica es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e r v \hat{u}$$

donde \hat{u} es el vector unitario perpendicular al plan de la trayectoria del electrón. El momento magnético asociado a este anillo de corriente elemental es:

$$\vec{m} u = I S \hat{u}$$

donde $I = -qv/(2\pi r)$ es la intensidad de corriente de la órbita circular y $S = \pi r^2$ el área encerrada por ésta. Encontramos una relación simple y notable entre el momento angular y el momento magnético del sistema clásico:

$$\vec{m} u = \gamma_0 \vec{L} \quad \text{con} \quad \gamma_0 = \frac{-q}{2m_e}$$

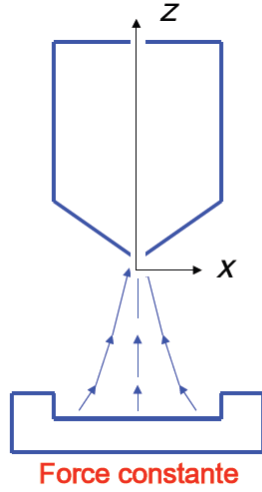
El coeficiente de proporcionalidad γ_0 , llamado razón giromagnética, no depende del radio r de la trayectoria, ni de la velocidad del electrón. Esta relación de proporcionalidad entre momento magnético y momento angular es el origen del efecto giroscópico, la evolución del momento angular está dada por $d\vec{L}/dt = \Gamma$, luego:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma_0 \vec{B} \times \vec{\mu} \quad (2)$$

En consecuencia, para un átomo en \vec{x} , el momento magnético no se alinea con el campo local $\vec{B}(\vec{x})$, sino que precesa alrededor de este eje con frecuencia:

$$w_0 = -\gamma_0 B(\vec{x})$$

llamada frecuencia de Larmor. Supongamos ahora que la trayectoria clásica de los átomos se encuentra en el plano de simetría $x = 0$ del imán (Fig 0.1.1).



A lo largo de esta trayectoria, el campo magnético es siempre paralelo a z , y la precesión de Larmor se efectúa entonces a lo largo de este eje. Por razones de simetría de este dispositivo, las cantidades $\partial B_z/\partial x$ y $\partial B_z/\partial y$ se anulan a lo largo de la trayectoria atómica (despreciando efectos de borde). Si el desplazamiento del momento magnético durante un período de precesión $2\pi/\omega_0$ es pequeño ante la escala de variación espacial de $\vec{B}(\vec{x})$, podemos promediar la fuerza $\sum_{i=x,y,z} \mu_i(t) \vec{\nabla} B_i$ sobre un período de Larmor. Las contribuciones de μ_x y μ_y se anulan, y queda solamente la fuerza según el eje z :

$$F_z = \mu_z(t) \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Además a partir de 2 deducimos que μ_z permanece constante cuando el átomo se mueve en el campo magnético, lo que justifica el resultado de la Eq. 1.

0.1.2. Resultados experimentales

En la ausencia de gradiente de campo magnético, uno observa una mancha única sobre la pantalla de detección, en la vecindad de $x = z = 0$. El gradiente de campo magnético permite medir la componente según z de un eventual momento magnético de los átomos. Suponiendo que todos los átomos tienen el mismo momento magnético de norma μ_0 , bajo la hipótesis que estos momentos tienen una dirección aleatoria cuando entran en la zona de campo magnético, se espera que los puntos de impacto sobre la pantalla forman un segmento paralelo a z , las dos extremidades corresponderían a $\mu_z = \pm\mu_0$.

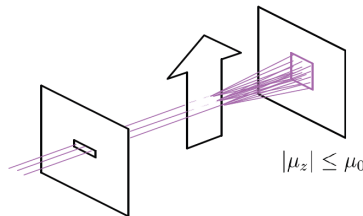


Figura 3: El momento magnético de un átomo poseerá una componente según z aleatoria entre $\pm\mu_0$. Clásicamente se esperaría ver un segmento paralelo a z en la pantalla de detección.

El resultado encontrado experimentalmente difiere radicalmente de esta predicción clásica.

El conjunto de impactos jamás forma un segmento sobre la pantalla. Para ciertos átomos, como la plata, estos impactos se agrupan en 2 manchas, correspondientes a $\mu_z = +\mu_0$ y $\mu_z = -\mu_0$, con $\mu_0 = 9,27 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$. Para otros tipos de átomos, se encuentran tres, cuatro, ..., manchas siempre dispuestas simétricamente respecto a la trayectoria original.

0.1.3. Descripción cuántica del problema

La primera etapa de la descripción cuántica consiste en precisar el espacio de estados de un átomo en esta experiencia, determinando los grados de libertad del átomo. Hay a priori dos clases de grados de libertad en juego, en primer lugar, los átomos son partículas móviles en el espacio, con grados de libertad de traslación según cada una de las tres direcciones x, y, z . A esta clase de grados de libertad especiales se agrega otro grado de libertad que corresponde al momento magnético interno del átomo. El espacio de estados que estamos llevados a considerar para interpretar la experiencia de Stern y Gerlach tiene una estructura de espacio tensorial:

$$E = E_{ext} \otimes E_{int}$$

El espacio asociado a los grados de libertad de traslación E_{ext} es el espacio de las funciones de onda visto en la primera parte del curso: $E_{ext} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Para construir el espacio E_{int} asociado al grado de libertad correspondiente al momento magnético interno del átomo, reinterpretemos la experiencia de Stern y Gerlach en un lenguaje cuántico: se trata de una medida del observable componente según z del momento magnético del átomo. Por definición, llamaremos a este observable $\hat{\mu}_z$.

La primera observación experimental es que, sin importar el estado del momento magnético del átomo, la medida μ_z siempre da uno de los dos resultados: $+\mu_0$ y $-\mu_0$. En consecuencia, la dimensión del espacio E_{int} es al menos 2. Existen al menos dos estados propios de $\hat{\mu}_z$, con valores propios $+\mu_0$ y $-\mu_0$. Es claro que el eje z no tiene nada de particular, las mismas consideraciones se aplican a las proyecciones μ_x y μ_y del momento magnético según los ejes x e y . Así, para cada observable \hat{m}_x, \hat{m}_y hay al menos dos estados propios con valores propios $\pm\mu_0$.

Se pueden explicar los resultados experimentales utilizando la hipótesis minimal que el espacio de Hilbert E_{int} es de dimensión 2. Esta hipótesis permite explicar todos los fenómenos relacionados con el momento magnético. Suponiendo que E_{int} es de dimensión 2, una base de este espacio se puede formar a través de los dos estados propios de \hat{m}_z correspondiente a los dos resultados de la medición $+\mu_0$ y $-\mu_0$. Notaremos a estos estados $|+\rangle_z$ y $|-\rangle_z$. Por definición

$$\hat{\mu}_z|+\rangle_z = \mu_0|+\rangle_z \quad , \quad \hat{\mu}_z|-\rangle_z = -\mu_0|-\rangle_z$$

y un estado interno cualquiera $|\mu\rangle$ del átomo se escribe:

$$|\mu\rangle = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. En una representación matricial, se tiene en la base $\{| \pm \rangle_z\}$:

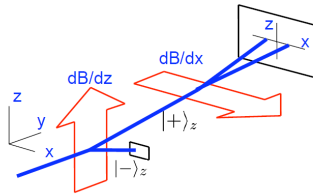
$$|+\rangle_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\mu\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

y

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

0.1.4. Los observables $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$

Consideremos ahora la situación experimental representada sobre la figura 0.1.4. Se disponen en serie dos imanes sucesivos. El primer imán crea un gradiente según el eje z y separa el jet atómico en dos beams correspondientes a los dos estados internos $|+\rangle_z$ y $|-\rangle_z$. Se coloca a la salida de este primer imán un obturador que sólo deja pasar los átomos en el estado $|+\rangle_z$. Este jet es enviado ahora hacia un imán que crea un gradiente de campo magnético según el eje x , ortogonal a z . Se mide entonces la componente según x del momento magnético atómico, observable cuántico que notaremos $\hat{\mu}_x$.



El resultado observado es que el beam se separa en dos beams de **igual** intensidad correspondientes a valores del momento magnético según x iguales a $+\mu_0$ y $-\mu_0$. Busquemos ahora caracterizar al operador $\hat{\mu}_x$. Por hipótesis, este operador, que actúa en E_{int} , debe ser descrito por una matriz 2×2 en la base $|\pm\rangle_z$:

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \gamma_x & \delta_x \end{pmatrix}$$

Varias restricciones existen sobre los cuatro parámetros α_x , β_x , γ_x y δ_x .

1. El operador $\hat{\mu}_x$ es hermítico, luego α_x y δ_x son reales, y $\gamma_x = \beta_x^*$.
2. Los resultados posibles de una medida para el observable componente x del momento magnético son $+\mu_0$ y $-\mu_0$. Estos son los valores propios de $\hat{\mu}_x$, lo que impone:

$$\text{suma de los valores propios} = \text{Tr}(\hat{\mu}_x) \rightarrow \alpha_x + \delta_x = 0$$

$$\text{producto de los valores propios} = \text{Det}(\hat{\mu}_x) \rightarrow \alpha_x \delta_x - \beta_x \gamma_x = -1$$

3. Si el estado inicial es $|+\rangle_z$, y se mide μ_x , se encuentran los resultados $+\mu_0$ y $-\mu_0$ con igual probabilidad. El valor medio de los resultados es entonces 0 para el estado $|+\rangle_z$, lo que se traduce en:

$$\langle + | \hat{\mu}_x | + \rangle_z = \mu_0 \alpha_x = 0$$

Combinando el conjunto de restricciones mencionadas, se deduce que el operador $\hat{\mu}_x$ es necesariamente de la forma:

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi_x} \\ e^{i\phi_x} & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que este procedimiento se podría haber hecho para cualquier eje perpendicular a z . En particular, para el eje y , ortogonal a la vez a x y a z , se puede utilizar el mismo razonamiento para concluir que el operador $\hat{\mu}_y$ debe ser de la forma:

$$\hat{\mu}_y = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi_y} \\ e^{i\phi_y} & 0 \end{pmatrix}$$

Falta únicamente establecer una relación entre los coeficientes ϕ_x y ϕ_y . Para ello, consideremos un jet de átomos preparados en el estado propio $\hat{\mu}_x$ asociado a $+\mu_0$. Este estado propio, que anotaremos $|+\rangle_x$, se escribe en la base $|\pm\rangle_z$:

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z + e^{i\phi_x} |-\rangle_z)$$

Si se mide la componente según y del momento magnético, para el estado recién mencionado, es claro por simple reiteración de los resultados experimentales precedentes que se encontrarán los resultados $\pm\mu_0$ con igual probabilidad. El valor medio del resultado es entonces nulo, lo que impone:

$$0 = \langle + | \hat{\mu}_y | + \rangle_x = \mu_0 \cos(\phi_x - \phi_y) \rightarrow \phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2}$$

Todo par de operadores que cumplen esta última condición son buenas representaciones de los operadores $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$. Por convención (y para simplificar la notación), se escoge $\phi_x = 0$, $\phi_y = \pi/2$, de forma que:

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu}_y = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son proporcionales a las matrices de Pauli. Los estados propios de $\hat{\mu}_x$ y μ_y son:

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z \pm |-\rangle_z) \quad |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z)$$

Notemos que estos tres operadores que acabamos de encontrar no conmutan. Precisamente, se puede verificar que se obtienen las siguientes relaciones de conmutación cíclicas:

$$[\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y] = 2i\mu_0\hat{\mu}_z \quad , \quad [\hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z] = 2i\mu_0\hat{\mu}_x \quad , \quad [\hat{\mu}_z, \hat{\mu}_x] = 2i\mu_0\hat{\mu}_y$$

En términos físicos, esto significa que no se pueden conocer simultáneamente dos componentes del momento magnético.

0.2. Formalismo del spin 1/2

La génesis del concepto de spin fue probablemente la más complicada de toda la física cuántica del primer cuarto de siglo. Luego del triunfo del modelo de Bohr en 1913, la vieja teoría de los cuanta de Bohr y Sommerfeld, fundada sobre la idea de restricciones cuánticas a variables clásicas, acumulaba éxitos y tendía hacia una explicación unificada de datos espectroscópicos. Sin embargo, preocupante era el hecho de que la acumulación de éxitos era cada vez menor frente a la acumulación de hechos inexplicables: el efecto Zeeman anormal, la separación de líneas espectrales, las capas atómicas más complejas, la experiencia de Stern-Gerlach, etc. La explicación resultó ser simple, pero revolucionaria. Por la primera vez aparecía una cantidad física puramente cuántica, sin ningún análogo clásico.

Una cantidad de observaciones experimentales (entre ellas Stern-Gerlach) obligaron a admitir la existencia de un grado de libertad interno para el electrón: un momento angular intrínseco. Es algo sin análogo clásico: todo modelo de este momento angular bajo la forma de una rotación

clásica es imposible. Dicho de otra forma, el electrón, partícula puntual, gira sobre si mismo, siendo esta rotación puramente cuántica.

0.2.1. Espacio de Hilbert del spin 1/2

La propiedad fundamental de una partícula de spin 1/2 es que cuando se mide la proyección de su momento angular intrínseco, desde ahora llamado spin, según un eje arbitrario, siempre se obtiene únicamente 2 valores, $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. De este hecho se deduce que al medir el cuadrado de una componente cualquiera del spin, siempre se encuentra el valor $\hbar^2/4$ (con probabilidad 1). En consecuencia, la medida del cuadrado del spin $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ da el resultado $S^2 = 3\hbar^2/4$. Todo estado de spin es superposición lineal de dos estados de base, y el grado de libertad de spin se describe por un espacio de Hilbert de dos dimensiones, E_{spin} .

Observables de spin

Sea \hat{S} el observable vectorial spin, es decir, un conjunto de tres observables $\{\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\}$. Estos tres observables poseen las relaciones de conmutación de un momento angular:

$$\hat{S} \times \hat{S} = i\hbar\hat{S}$$

Representación en una base particular

Escojamos una base de estados donde \hat{S}^2 y \hat{S}_z son diagonales, que notaremos $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle-| \quad \hat{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}| \pm \rangle\langle \pm |$$

Un estado de spin cualquiera $|\Sigma\rangle$ se escribe:

$$|\Sigma\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Las probabilidades de encontrar $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$ en una medida de S_z sobre este estado son $P(+\hbar/2) = |\alpha|^2$, $P(-\hbar/2) = |\beta|^2$.

Representación matricial

Utilizando las matrices de Pauli $\sigma = \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$\hat{\sigma} \times \hat{\sigma} = 2i\hat{\sigma}$$

Los observables de spin se escriben de la forma siguiente:

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$$

En esta base, los estados propios $|\pm\rangle_x$ de \hat{S}_x y $|\pm\rangle_y$ de \hat{S}_y son:

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1//\pm 1) \quad |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1//\pm i)$$

Estado de spin cualquiera

Consideremos el estado de spin más general $|\Sigma\rangle$. A un factor de fase global (sin importancia física), este estado siempre se puede escribir:

$$|\Sigma\rangle = e^{-i\varphi/2} \cos \vartheta/2 |+\rangle + e^{i\varphi/2} \sin \vartheta/2 |-\rangle$$

donde $0 \leq \vartheta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. Es entonces simple verificar que $|\Sigma\rangle$ es estado propio con valor propio $\hbar/2$ del operador $\hat{S}_{\hat{u}} = \hat{u} \cdot \hat{S}$, proyección del spin sobre el eje de vector unitario \hat{u} , de ángulo polar ϑ y azimut φ . Se tiene, en efecto:

$$\hat{u} = \sin \vartheta \cos \varphi \hat{u}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{u}_y + \cos \vartheta \hat{u}_z$$

luego:

$$\hat{S}_{\hat{u}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin \vartheta e^{i\varphi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Dicho de otra forma, para todo estado $|\Sigma\rangle$ de un spin $1/2$, existe un vector \hat{u} tal que $|\Sigma\rangle$ es estado propio del operador $\hat{u} \cdot \hat{S}$, correspondiente a la proyección del spin en la dirección \hat{u} . Esta propiedad notable no se generaliza a un spin mayores a $1/2$.

0.3. Momento magnético y Spin

Al momento angular de spin de una partícula puntual le corresponde un momento magnético proporcional:

$$\hat{\mu} = \gamma \hat{S} = \mu_0 \hat{\sigma}$$

con $\mu_0 = \gamma \hbar/2$. Esta proporcionalidad es fundamental: ella implica las relaciones de conmutación entre las componentes del momento magnético que establecimos fenomenológicamente anteriormente. El electrón, el protón y el neutrón tienen un spin $1/2$. El momento magnético correspondiente se relaciona al spin \hat{S} por la relación $\hat{\mu} = \gamma \hat{S}$. Experimentalmente se tiene:

$$\text{electrón } \gamma \approx 2\gamma_0 = -q/m_e$$

$$\text{protón } \gamma \approx 2,79q/m_p$$

$$\text{neutrón } \gamma \approx -1,91q/m_p$$

Los valores posibles de los resultados de la medida de una componente del momento magnético son entonces:

$$\text{electrón } \mu_z = \pm \mu_B = \mp q\hbar/2m_e$$

$$\text{protón } \mu_z = \pm 2,79 q\hbar/2m_p$$

$$\text{neutrón } \mu_z = \pm 1,91 q\hbar/2m_p$$

La cantidad $\mu_B = -9,274 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$ es llamado magnetón de Bohr. La cantidad $\mu_N = q\hbar/2m_p = 5,051 \times 10^{-27} \text{ JT}^{-1}$ se llama magnetón nuclear.

Problema 1: Determinación del estado magnético de un átomo de plata

Considere un átomo de plata en un estado de momento magnético arbitrario:

$$\alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z \quad \text{con} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

a) Muestre que se trata de un estado propio de $\hat{u} \cdot \vec{\mu}$ con valor propio $+\mu_0$ para un vector unitario \hat{u} a precisar.

b) Alicia le entrega a Bernardo un átomo de plata en un estado de momento magnético a priori desconocido del tipo visto en a). Puede Bernardo determinar este estado, con medidas del tipo Stern-Gerlach?

c) Alicia le entrega ahora N ($N \gg 1$) átomos de plata, todos preparados en el mismo estado. Indique una estrategia posible para que Bernardo determine (de forma aproximada) este estado.

Solución

a) Siempre es posible escribir los coeficientes α y β bajo la forma:

$$\alpha = \cos \vartheta/2, \quad \beta = e^{i\varphi} \sin \vartheta/2$$

Multiplicando el estado por un factor de fase global para obtener $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideremos ahora un experimento de Stern-Gerlach orientado según el vector unitario \hat{u} , definido por los ángulos polares ϑ , φ :

$$\hat{u} = \sin \vartheta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \vartheta \hat{e}_z$$

lo que entrega:

$$\hat{u} \cdot \hat{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} \cos \vartheta & e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\ e^{i\varphi} \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Es inmediato verificar que $\cos \vartheta/2|+\rangle + e^{i\varphi} \sin \vartheta/2|-\rangle$ es estado propio de $\hat{u} \cdot \hat{\mu}$ con valor propio $+\mu_0$

b) Bernardo debe escoger un eje \hat{u}' para medir el momento magnético, sin conocer \hat{u} . Su medida le dará una respuesta binaria $\pm\mu_0$, y el estado del sistema después de la medida es $|\pm\rangle_{\hat{u}'}$, diferente del estado inicial. Medidas posteriores no aportarán información suplementaria sobre el estado entregado por Alicia. En consecuencia, una medida sobre un solo momento magnético no permite determinar el estado inicial. La única certeza que posee Bernardo es que una vez que encuentra $+\mu_0$ (resp. $-\mu_0$) en la medida según el eje \hat{u}' es que el estado inicial no era $|-\rangle_{\hat{u}'}$ (resp. $|+\rangle_{\hat{u}'}$).

c) Si Alicia le entrega un gran número N de momentos magnéticos, todos preparados en el mismo estado desconocido inicial, Bernardo puede separar este conjunto en 3 clases, conteniendo cada una aproximadamente $N/3$ átomos. Para los $N/3$ primeros átomos, el puede medir μ_z y deducir $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ a partir de la intensidad relativa de los dos spots $\mu_z = \pm\mu_0$ en la pantalla de detección. Para los $N/3$ átomos siguientes, se mide μ_x y las intensidades relativas de los dos spots correspondientes a $\mu_x = \pm\mu_0$ permite conocer $|\alpha \pm \beta|^2$. Finalmente, para los $N/3$ átomos que quedan, se mide μ_y y a partir de esto se deduce $|\alpha \pm i\beta|^2$. Se puede entonces determinar α y β , salvo por un factor de fase global (sin importancia física). Por supuesto que esta determinación de α y β es aproximada, siendo el error estadístico relativo del orden de $N^{-1/2}$.

Problema 2: Momento magnético en un campo uniforme

El momento magnético $\vec{\mu}$ de un neutrón puede describirse de la misma forma que el momento magnético de un átomo de plata en la experiencia de Stern Gerlach. Si un neutrón se coloca en un campo uniforme \vec{B} paralelo al eje z , puede representarse por un sistema de dos estados en lo que se refiere a la medida del momento magnético. (Olvidando las variables espaciales). Notemos $|+\rangle$ y $|-\rangle$ los estados propios del observable $\hat{\mu}_z$. Estos estados propios corresponden a los dos valores propios $+\mu_0$ y $-\mu_0$. El hamiltoniano del sistema colocado en un campo \vec{B} es $\hat{H} = -B\hat{\mu}_z$. Definimos $w = -2\mu_0 B/\hbar$.

a) Escriba los niveles de energía del sistema.

b) Al instante $t = 0$ el neutrón está preparado en el estado $|\psi(0)\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$. Qué resultados se pueden obtener al medir μ_x , con qué probabilidades?

c) Escriba el estado $|\psi(T)\rangle$ al instante T .

d) Se mide μ_x al instante T , cuál es la probabilidad de medir $+\mu_0$?

Solución

a) Los niveles de energía de \hat{H} son:

$$E_{\pm} = \mp B\mu_0 = \pm \hbar w/2$$

b) El estado $|\psi(0)\rangle$ es estado propio de $\hat{\mu}_z$ con valor propio $+\mu_0$. Se encuentra entonces $+\mu_0$ con probabilidad uno al medir μ_x .

c) La evolución del estado considerado es:

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle e^{-iwT/2} + |-\rangle e^{iwT/2})$$

d) La probabilidad correspondiente se escribe:

$$P(T) = |\langle + | \mu_x \psi(T) \rangle|^2 = |\langle \psi(0) | \psi(T) \rangle|^2 = \cos^2 \frac{wT}{2}$$

Problema 3: Producto de matrices de Pauli

Muestre que

$$\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \delta_{j,k} + i\varepsilon_{j,k,l} \hat{\sigma}_l$$

donde $\varepsilon_{j,k,l} = 1$ (resp. -1) si (j, k, l) es una permutación par (resp. impar) de (x, y, z) , y $\varepsilon_{j,k,l} = 0$ en otro caso.

Solución

Se puede verificar en primer lugar que:

$$\hat{\sigma}_j^2 = 1 \quad j = x, y, z$$

De forma que en general, se tendrá:

$$\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \delta_{j,k} + f_{j,k}$$

con $f_{j,k} \neq 0$ sólo si $j \neq k$. Esto se cumple inmediatamente si f es antisimétrico, $f_{j,k} = -f_{k,j}$. A partir de la relación de conmutación de las matrices de Pauli:

$$[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k] = f_{j,k} - f_{k,j} = 2f_{j,k} = 2i\varepsilon_{j,k,l} \hat{\sigma}_l$$

Se ve que $f_{j,k} = -f_{k,j} = i\varepsilon_{j,k,l}\hat{\sigma}_l$:

y entonces:

$$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \delta_{j,k} + i\varepsilon_{j,k,l}\hat{\sigma}_l$$

Problema 4: Álgebra de matrices de Pauli

Considere las matrices de Pauli $\hat{\sigma}$, y dos vectores \vec{A} y \vec{B} . Muestre que:

$$(\hat{\sigma} \cdot \vec{A}) (\hat{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\hat{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Solución

Se tiene:

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{A} = \sum_j \hat{\sigma}_j A_j \quad \hat{\sigma} \cdot \vec{B} = \sum_k \hat{\sigma}_k B_k$$

luego:

$$(\hat{\sigma} \cdot \vec{A}) (\hat{\sigma} \cdot \vec{B}) = \sum_{jk} \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k A_j B_k$$

y usando el resultado encontrado en la pregunta anterior:

$$(\hat{\sigma} \cdot \vec{A}) (\hat{\sigma} \cdot \vec{B}) = \sum_{jk} A_j B_k \{\delta_{j,k} + i\varepsilon_{j,k,l}\hat{\sigma}_l\}$$

$$(\hat{\sigma} \cdot \vec{A}) (\hat{\sigma} \cdot \vec{B}) = \sum_j A_j B_j + i \sum_{j,k} \varepsilon_{j,k,l} A_j B_k \hat{\sigma}_l = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\hat{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

Problema 5: Momento angular de spin y momento angular orbital

Considere una partícula de spin 1/2 cuyo estado es $|\psi\rangle = \psi_+(\vec{r})|+\rangle + \psi_-(\vec{r})|-\rangle$. Sea \hat{S} el observable de spin y \hat{L} el observable de momento angular orbital. Suponga que:

$$\psi_+(\vec{r}) = R(r) \left(Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) \right)$$

$$\psi_-(\vec{r}) = \frac{R(r)}{\sqrt{3}} (Y_{1,1}(\vartheta, \varphi) - Y_{1,0}(\vartheta, \varphi))$$

- Cuál es la condición de normalización sobre $R(r)$?
- Cuáles son las probabilidades de encontrar $\pm\hbar/2$ en una medida de S_z o de S_x ?
- Cuáles son los resultados posibles de una medida de L_z ?. Indique las probabilidades correspondientes.

Solución

a) Se debe tener:

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = (\psi_+(\vec{r}), \psi_+(\vec{r}))\langle+|+\rangle + (\psi_+(\vec{r}), \psi_-(\vec{r}))\langle+|-\rangle$$

$$+ (\psi_-(\vec{r}), \psi_+(\vec{r}))\langle-|+\rangle + (\psi_-(\vec{r}), \psi_-(\vec{r}))\langle-|-\rangle = 1$$

Los términos centrales son nulos ya que $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son ortogonales. Luego:

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r |\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2 = 1$$

Dado que los armónifos esféricos $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ son ortonormales, se tiene:

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^+} dr r^2 |R(r)|^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1+1) \right\} = 1$$

Finalmente:

$$\int_{\mathbb{R}^+} dr r^2 |R(r)|^2 = \frac{1}{2}$$

b) Para S_z , las probabilidades son:

$$p(+\hbar/2) = |\langle +|\psi \rangle|^2 = \|\psi_+(\vec{r})\|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

y obviamente:

$$p(-\hbar/2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Para S_x , tenemos:

$$\begin{aligned} p(+\hbar/2) &= \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle +| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -| \right) |\psi \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} (\|\psi_+ + \psi_-\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\psi_+(\vec{r})\|^2 + \|\psi_-(\vec{r})\|^2 + 2\text{Re}(\psi_+(\vec{r}), \psi_-(\vec{r}))) \end{aligned}$$

pero

$$(\psi_+(\vec{r}), \psi_-(\vec{r})) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}^+} dr r^2 |R(r)| = -\frac{1}{6}$$

de esta forma:

$$p(+\hbar/2) = \frac{1}{2} \left(1 - 2\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}$$

y

$$p(-\hbar/2) = 2/3$$

c) Se ve a partir de la expansión de la función de onda en armónicos esféricos que los únicos resultados posibles al medir L_z son \hbar y 0. La probabilidad de medir \hbar es:

$$|(Y_{1,1}, \psi_+)|^2 + |(Y_{1,1}, \psi_-)|^2 = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^+} dr r^2 |R(r)|^2 = \frac{1}{6}$$

y por lo tanto la probabilidad de medir $L_z = 0$ es 5/6.

Problema 6: Anomalía del momento magnético del electrón

En el cuadro de la ecuación de Dirac, el factor giromagnético g del electrón es igual a 2. Dicho de otra forma, la razón entre el momento magnético y el spin del electrón es $gq/(2m) = q/m$, donde q y m son la carga y la masa de la partícula ($q < 0$). Cuando se calcula la interacción del electrón con el campo electromagnético cuantificado, se encuentra un valor de g ligeramente diferente de 2. El propósito de este problema es estudiar la medida de la cantidad $g - 2$.

Para esto, considere un electrón sumergido en un campo magnético \vec{B} estático, uniforme dirigido según Oz . El hamiltoniano de este electrón es:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - q\hat{A})^2}{2m} - \hat{\mu} \cdot \vec{B}$$

donde $\vec{A} = \vec{B} \times \hat{r}/2$ es el potencial vector, y $\hat{\mu}$ es el operador momento magnético de spin. Este operador se relaciona con el spin mediante $\hat{\mu} = \gamma\hat{S}$, con $\gamma = (1 + a)q/m$. La cantidad adimensional a es llamada anomalía del momento magnético. En el cuadro de la ecuación de Dirac, $a = 0$. La electrodinámica cuántica predice, a primer orden en α , constante de estructura fina, $a = \alpha/(2\pi)$. El operador velocidad del electrón es $\hat{v} = (\hat{p} - q\vec{A})/m$. Se define $w = qB/m$.

a) Verifique las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\hat{v}_x, \hat{H}] = i\hbar w \hat{v}_y, \quad [\hat{v}_y, \hat{H}] = -i\hbar w \hat{v}_x, \quad [\hat{v}_z, \hat{H}] = 0$$

b) Considere las tres cantidades:

$$C_1 = \langle \hat{S}_z \hat{v}_z \rangle \quad C_2 = \langle \hat{S}_x \hat{v}_x + \hat{S}_y \hat{v}_y \rangle \quad C_3 = \langle \hat{S}_x \hat{v}_y - \hat{S}_y \hat{v}_x \rangle$$

Escriba las ecuaciones diferenciales de evolución de C_1 , C_2 , C_3 . Muestre que estas 3 ecuaciones forman un sistema diferencial lineal a coeficientes constantes. Defina $\Omega = aw$

c) Cuál es la evolución temporal de $\langle \hat{S} \cdot \hat{v} \rangle$?

d) Un jet monocinético de electrones se prepara en un estado de spin tal que se conoce $C_1(0)$, $C_2(0)$, y $C_3(0)$ al instante $t = 0$. El jet interactúa con el campo \vec{B} durante el intervalo $[0, T]$. Al instante T , se mide una cantidad proporcional a $\langle \hat{S} \cdot \hat{v} \rangle$. El resultado de esta medida (1963) se presenta en la figura 0.3 en función de T , para un campo magnético $B = 9,4 \text{ mT}$. Deduzca a partir de esta curva un valor aproximado para la anomalía a .

e) Está la medida experimental en acorde con la predicción de la electrodinámica cuántica?

Comentarios

El valor de la anomalía es hoy en día conocida con una precisión impresionante:

$$a^{teo} = 0,001\,159\,652\,200 \quad (40)$$

$$a^{exp} = 0,001\,159\,652\,193 \quad (10)$$

El cálculo teórico incluye todas las correcciones hasta orden 3 en α . Es uno de los logros más espectaculares de la física fundamental, los valores experimental y teórico del factor giromagnético están en acorde en el límite de las posibilidades experimentales (precisión en las

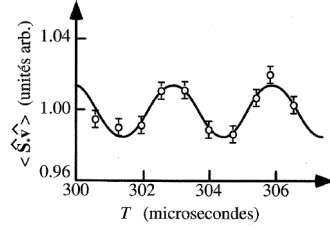


Figura 4:

medidas) y teóricas (capacidad de los computadores).

Solución

a) Tenemos:

$$\begin{aligned} [\hat{v}_x, \hat{v}_y] &= \frac{1}{m^2} [\hat{p}_x - qA_x, \hat{p}_y - qA_y] \\ &= \frac{1}{m^2} \hat{p}_x \hat{p}_y - q\hat{p}_x A_y - qA_x \hat{p}_y + q^2 A_x A_y - (\hat{p}_y \hat{p}_x - q\hat{p}_y A_x - qA_y \hat{p}_x + q^2 A_y A_x) \\ &= \frac{1}{m^2} [\hat{p}_x \hat{p}_y] - q[\hat{p}_x, A_y] + q[\hat{p}_y, A_x] \end{aligned}$$

Como $[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$, y

$$[\hat{p}_x, A_y]\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A_y \psi + i\hbar A_y \frac{\partial}{\partial x} \psi = -i\hbar \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \psi + A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + i\hbar A_y \frac{\partial}{\partial x} \psi = -i\hbar \frac{\partial A_y}{\partial x} \psi$$

y análogamente, $[\hat{p}_y, A_x] = -i\hbar \frac{\partial A_x}{\partial y}$, se tiene:

$$[\hat{v}_x, \hat{v}_y] = \frac{i\hbar q}{m^2} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \frac{i\hbar q}{m^2} B = \frac{i\hbar \omega}{m}$$

Es fácil deducir que $[\hat{v}_x, \hat{v}_z] = [\hat{v}_y, \hat{v}_z] = 0$, pues el campo magnético solo posee componente según z . Con esto:

$$[\hat{v}_x, \hat{v}_y^2] = [\hat{v}_x, \hat{v}_y] \hat{v}_y + \hat{v}_y [\hat{v}_x, \hat{v}_y] = 2i\hbar \omega \hat{v}_y / m$$

Finalmente, considerando que el hamiltoniano es $\hat{H} = m\hat{v}^2/2 - \gamma B \hat{S}_z$:

$$[\hat{v}_x, \hat{H}] = \frac{m}{2} [\hat{v}_x, \hat{v}_y^2] = i\hbar \omega \hat{v}_y$$

del mismo modo:

$$[\hat{v}_y, \hat{H}] = \frac{m}{2} [\hat{v}_y, \hat{v}_x^2] = -i\hbar \omega \hat{v}_x$$

y

$$[\hat{v}_z, \hat{H}] = 0$$

b) Utilizando el teorema de Ehrenfest:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle$$

La evolución de C_1 es simple:

$$[\hat{S}_z \hat{v}_z, \hat{H}] = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} C_1 = 0 \rightarrow C_1(t) = A_1$$

donde A_1 es una constante. Para C_2 y C_3 :

$$[\hat{S}_x \hat{v}_x, \hat{H}] = [\hat{S}_x \hat{v}_x, m/2\hat{v}^2] - \gamma B [\hat{S}_x \hat{v}_x, \hat{S}_z] = i\hbar w \left(\hat{S}_x \hat{v}_y + (1+a) \hat{S}_y \hat{v}_x \right)$$

De igual forma:

$$[\hat{S}_y \hat{v}_y, \hat{H}] = -i\hbar w \left(\hat{S}_y \hat{v}_x + (1+a) \hat{S}_x \hat{v}_y \right)$$

$$[\hat{S}_x \hat{v}_y, \hat{H}] = -i\hbar w \left(\hat{S}_x \hat{v}_x - (1+a) \hat{S}_y \hat{v}_y \right)$$

$$[\hat{S}_y \hat{v}_x, \hat{H}] = i\hbar w \left(\hat{S}_y \hat{v}_y - (1+a) \hat{S}_x \hat{v}_x \right)$$

En consecuencia:

$$[\hat{S}_x \hat{v}_x + \hat{S}_y \hat{v}_y, \hat{H}] = -i\hbar w a \left(\hat{S}_x \hat{v}_y - \hat{S}_y \hat{v}_x \right)$$

$$[\hat{S}_x \hat{v}_y - \hat{S}_y \hat{v}_x, \hat{H}] = i\hbar w a \left(\hat{S}_x \hat{v}_x + \hat{S}_y \hat{v}_y \right)$$

Esto significa:

$$\frac{dC_2}{dt} = -\Omega C_3 \quad , \quad \frac{dC_3}{dt} = \Omega C_2$$

con $\Omega = aw$.

c) Se deduce que:

$$\frac{d^2 C_2(t)}{dt^2} = -\Omega^2 C_2(t)$$

cuya solución es:

$$C_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi)$$

con A_2, φ constantes. Luego, la forma general de la evolución de $\langle \hat{S} \cdot \hat{v} \rangle$:

$$\langle \hat{S} \cdot \hat{v} \rangle(t) = C_1(t) + C_2(t) = A_1 + A_2 \cos(\Omega t + \varphi)$$

Dicho de otra forma, en ausencia de anomalía ($a = 0$), el spin y la velocidad precesan exactamente a la misma velocidad angular. Esto se corresponde con el problema clásico, en donde un electrón sometido a un campo magnético uniforme describe una trayectoria circular en el plano perpendicular al campo, con una frecuencia de ciclotrón $w = qB/m$, igual a la frecuencia de Larmor de precesión de su momento magnético.

Entonces una medida de la diferencia de estas dos frecuencias permite acceder al valor de la anomalía.

d) Utilizamos la relación $a = \Omega/w$. La medida de $\langle \hat{S} \cdot \hat{v} \rangle$ presenta un comportamiento periódico en el tiempo de período $\tau \sim 3 \mu s$, es decir:

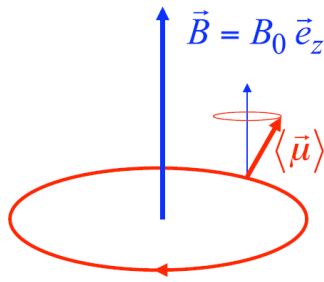


Figura 5:

$$\Omega = \frac{2\pi}{\tau} \approx 2 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$$

En un campo $B = 9,4 \text{ mT}$, $w = 1,65 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$, luego:

$$a = \Omega/w \approx 1,2 \times 10^{-3}$$

Este valor está en buen acorde con el valor teórico a primer orden en α :

$$a = \frac{\alpha}{2\pi} = 1,16 \times 10^{-3}$$

Problema 7: Resonancia magnética nuclear

Suponga un protón sumergido en un campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \hat{u}_z$. El momento magnético del protón es $\hat{\mu} = \gamma \hat{S}$, con $\gamma = 2,79 q/m_p$. Se define $w_0 = -\gamma B_0$ (frecuencia de Larmor). A este campo magnético se agrega un campo magnético rotatorio $\vec{B}_1 = B_1 \cos wt \hat{u}_x + B_1 \sin wt \hat{u}_y$ tal que $B_1 \ll B_0$ (Ver figura 0.3). Se define $w_1 = -\gamma B_1$ ($w_1 \ll w_0$).

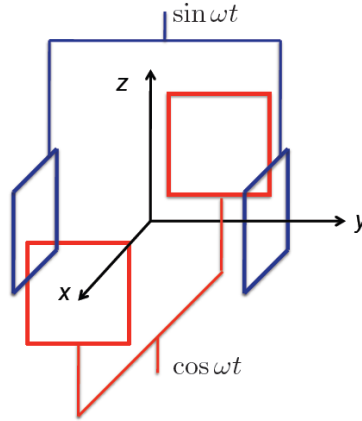


Figura 6:

- Escriba el hamiltoniano \hat{H} que actúa sobre el spin del protón en su forma matricial.
- El grado de libertad del spin está descrito por un estado de la forma $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$, donde $|\pm\rangle$ son los autoestados de \hat{S}_z . Utilizando la ecuación de Schrodinger, determine la ecuación de evolución temporal para $a_+(t)$ y $a_-(t)$.
- Suponga la condición inicial $a_+(0) = 1$, $a_-(0) = 0$, y mediante el cambio $a_{\pm}(t) = b_{\pm}(t)e^{\pm i w t}$ muestre que los $b_{\pm}(t)$ satisfacen un sistema diferencial de segundo orden desacoplado a coeficientes constantes. Defina $\Omega^2 = (w - w_0)^2 + w_1^2$
- Calcule la probabilidad de encontrar al spin en el estado $|-\rangle$ al instante t . Discuta el caso $|w - w_0| \gg w_1$ y $w = w_0$ (resonancia).

Solución

- La energía de interacción es

$$\hat{H} = -\hat{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma B_0 \hat{S}_z - \gamma B_1 (\hat{S}_x \cos wt + \hat{S}_y \sin wt)$$

En forma matricial:

$$\hat{H} = \frac{\hbar w_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar w_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos wt - i \sin wt \\ \cos wt + i \sin wt & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} w_0 & w_1 e^{-iwt} \\ w_1 e^{iwt} & -w_0 \end{pmatrix}$$

- Se tiene:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

Esto es:

$$i \frac{d}{dt} a_+(t) = \frac{w_0}{2} a_+(t) + \frac{w_1}{2} e^{-iwt} a_-(t)$$

$$i \frac{d}{dt} a_{-}(t) = -\frac{w_0}{2} a_{-}(t) + \frac{w_1}{2} e^{iwt} a_{+}(t)$$

c) Utilizando el cambio de variables:

$$b_{\pm}(t) = a_{\pm}(t) e^{i\pm wt}$$

se tiene:

$$\frac{d^2}{dt^2} b_{\pm}(t) + \Omega^2 b_{\pm}(t) = 0$$

con $\Omega^2 = (w_0 - w)^2 + w_1^2$.

d) La probabilidad pedida es:

$$P_{-}(t) = |a_{-}(t)|^2 = |b_{-}(t)|^2$$

Las condiciones iniciales son

$$b_{+}(0) = a_{+}(0) = 1 \quad , \quad b_{-}(0) = a_{-}(0) = 0$$

$$i \frac{d}{dt} a_{-}(0) = \frac{w_1}{2} = i \frac{d}{dt} b_{-}(0)$$

La solución es:

$$P_{-}(t) = \frac{w_1^2}{(w_0 - w)^2 + w_1^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}$$

$$P_{-}(t) = \frac{w_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}$$

Si no hay resonancia, es decir $|w_0 - w| \gg w_1$, entonces $w_1^2/\Omega^2 \ll 1$ y la probabilidad será una función oscilante con amplitud mucho menor que 1. En el caso resonante, $w_0 = w$, se tendrá:

$$P_{-}(t) = \sin^2 \frac{w_1 t}{2}$$

Es decir, existirán instantes para los cuales $P_{-}(t) = 1$ (es decir, el spin se invierte con probabilidad 1), dados por

$$\frac{w_1 t}{2} = (2k - 1) \frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

