SÉANCE 6

A chercher avant la séance - Non-traité en TD

Le cuivre porte le numero atomique $Z = 29$, sa masse atomique est 63, la densité du cuivre massif est de 9. Le nombre d'Avogrado est $6,02 \times 10^{23}$.

1. Calculer la quantité de charge négative et positive contenue dans 1 cm^3 de Cuivre.

2. Quelle est la proportion d'électrons à enlever pour que la charge totale de ce volume de cuivre atteigne 0,1 μC ? (Cette charge est très forte en électrostatique.)

3. On répartit uniformément ces 0,1 μC au sein d'un fil cylindrique de longueur 1 m et de rayon 1 mm. Calculer la densité volumique de charge ρ ?

4. On répartit uniformement ces 0,1 μC à la surface d'un fil cylindrique de longueur 1 m et de rayon 1 mm. Calculer la densité surfacique de charge σ ?

5. On néglige désormais la section du fil de longueur 1 m. Calculer la densité linéique de charges λ ?

1 Distribution volumique

On considère la distribution volumique de charge suivante :

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 + a\dfrac{r^2}{R^2}\right) \text{ si } r \leq R \\ 0 \text{ si } r > R \end{cases}$$

Dans ces expressions, ρ_0 , a et R sont des constantes et r désigne la distance de l'origine O au point M. Calculer la charge totale correspondant a cette distribution en fonction de ρ_0 , a et R.

2 Distribution surfacique

On considère une sphère de rayon R, portant une charge totale donnée par la distribution surfacique suivante, en coordonnées sphériques : $\sigma(r, \theta, \varphi) = \sigma_0 \sin\theta$. Donner l'expression de σ_0 si on veut que la sphère porte une charge totale égale à Q.

3 Distribution linéique

Soit une file d'ions espacés d'un intervalle constant a, portant chacun une charge $+ne$ où n est un nombre entier et e est la charge élémentaire. Estimer la densite linéique de charge λ dans ce cas, en fonction de a, n et e.

Pour aller plus loin

On considère à nouveau la répartition de charges suivante :

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} A\left(x^2 + y^2\right) \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \\ 0 \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 > R^2 \end{cases}$$

1. Donner la dimension de la constante A.

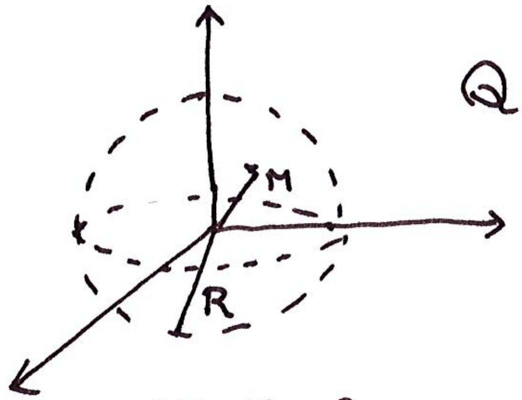
2. Calculer la charge totale Q portée par la sphère en fonction de A et R. On pourra, au choix, faire ce calcul en coordonnées cylindriques (u, θ, z) ou en coordonnées sphériques (r, θ, φ).

6.1 DISTRIBUTION VOLUMIQUE

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 + a\dfrac{r^2}{R^2}\right) & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$dq(M) = \rho(M)\, dV$$

AVEC $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$



$$Q = \sum_{M \in \text{Sphère}} dq(M)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho_0 \left(1 + \frac{ar^2}{R^2}\right) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right) \cdot \int_0^{R} \rho_0 \left(1 + \frac{ar^2}{R^2}\right) dr \, r^2$$

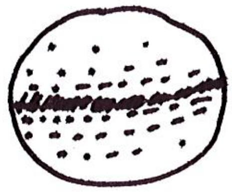
$$= [\varphi]_0^{2\pi} \times [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot \rho_0 \int_0^{R} \left(r^2 + \frac{ar^4}{R^2}\right) dr$$

$$Q = 2\pi \times 2 \times \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} + \frac{a}{R^2}\frac{r^5}{5}\right]_0^R$$

$$Q = 4\pi \rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{a}{5}\right)$$

.2 DISTRIBUTION SURFACIQUE

$$\sigma(R, \theta, \varphi) = \sigma_0 \sin\theta$$



$$Q = \sum_{\substack{M \in \text{surface de} \\ \text{la sphère}}} dq(M) \qquad \text{AVEC} \quad dq(M) = \sigma(M)\, dS$$

$$dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_0 \sin\theta \; R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \sigma_0 R^2 \left(\int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \right)$$

$$= 2\pi \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

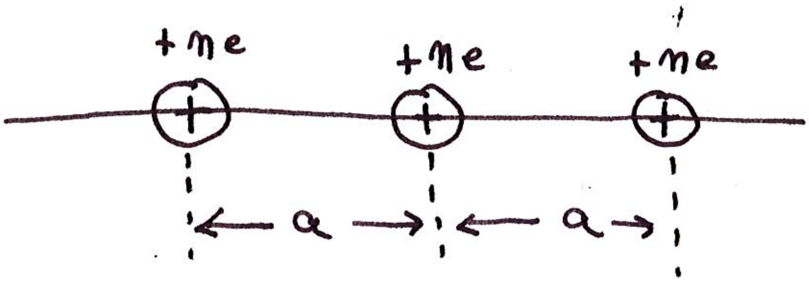
$$= \frac{2\pi \sigma_0 R^2}{2} \left(\int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} \cos 2\theta \, d\theta \right)$$

$$= \frac{2\pi \sigma_0 R^2}{2} \times \left[\pi - \underbrace{\left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi}}_{\frac{1}{2}\left(\cancel{\sin 2\pi}^{\,0} - \cancel{\sin 0}^{\,0} \right)} \right]$$

$$= \pi^2 \sigma_0 R^2$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{Q}{\pi^2 R^2}$$

6.3 DISTRIBUTION LINÉIQUE



SUR UNE DISTANCE a ON A LA CHARGE PORTÉ PAR LE DEMI-ION DE GAUCHE PLUS LA CHARGE PORTÉE PAR LE DEMI-ION DE DROITE

$$+\frac{ne}{2} + \frac{ne}{2} = ne$$

DONC $\lambda \equiv$ CHARGE PAR UNITÉ DE LONGUEUR

$$\lambda = \frac{ne}{a}$$