Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingenieria / Facultad de Física
IEE1133/FIZ1433 Materiales Eléctricos
Profesor: Roberto Rodriguez

Ayudantía 1: Propiedades eléctricas de los metales

Joaquín Arancibia: jiaranci@puc.cl
Fabián Cádiz: facadiz@puc.cl

1. Fenómenos de transporte en metales

1.1. Introducción

Los materiales eléctricos que constituyen la base de la electrónica actual son los conductores y semi-conductores (estos últimos son clave en la construcción de compuertas lógicas), los que en su estado sólido presentan un arreglo periódico de sus átomos, formando así un cristal. En un conductor, los electrones de valencia de los átomos pueden participar en la conducción eléctrica, esto es, generan una corriente a través del cristal cuando se aplica un campo eléctrico externo. El problema y la comprensión de estos dispositivos es fundamentalmente cuántico: **cualquier visión clásica del electrón sería insuficiente**. Sin embargo, existen modelos clásicos que permiten obtener resultados que seguirán siendo válidos en mecánica cuántica, salvo ciertas correcciones que se mencionarán más adelante. Uno de ellos es el modelo para la conductividad de un metal, debida al físico alemán Paul Drude.

Un electrón libre en un cristal sufre interacciones con los átomos de la estructura cristalina, con las impurezas y diversos defectos presentes en el material. Estas colisiones modifican su velocidad, pero generalmente la energía intercambiada durante una colisión es débil, se trata entonces de colisiones cuasi-elásticas y, en la ausencia de un campo aplicado, el movimiento de un electrón es aleatorio y se parece al movimiento de una molécula en un gas clásico. Bajo la influencia de un campo eléctrico $\vec{E}$, el electrón es arrastrado en el sentido inverso del campo con una velocidad de deriva $\vec{v}$, por lo general de magnitud mucho menor a la de su velocidad térmica. La longitud del camino recorrido por un electrón es entonces mucho más grande que la distancia sobre la cual ha sido arrastrado por el campo aplicado (figura 1). Por otro lado, en un material inhomogéneo, es decir, en un material que presenta gradientes de concentración de portadores libres, se debe tener en cuenta el movimiento de los portadores debido a un efecto de difusión.

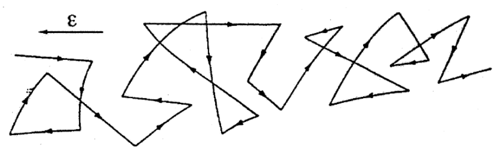


Figura 1: Camino recorrido por un electrón en un campo eléctrico $\vec{E}$

1.2. Modelo de Drude para la conductividad eléctrica

Considere un gas clásico de electrones libres (cuya densidad es n) confinados en un cristal y sin interacciones. En la ausencia de campo aplicado, éstos se desplazan al asar con una distribución de velocidades isotropica (Maxwell-Boltzmann), correspondiente a una situación de equilibrio termodinámico a temperatura T. La velocidad media $\vec{v}$ es nula, de forma que también lo es la corriente $\vec{J}$ asociada a estos electrones.
Introduzcamos ahora el tiempo de colisión τ, que es el tiempo medio entre dos colisiones, o más precisamente, el tiempo característico de vuelta al equilibrio por las colisiones a partir de una situación inicial perturbada $\vec{v} \neq \vec{0}$. En prescencia de un campo eléctrico $\vec{E}$, es decir de una fuerza exterior $\vec{F}$, la ecuación de movimiento se escribe:

$$\vec{F} = -e\vec{E} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{\tau} \tag{1}$$

donde m es la masa del electrón y τ es considerado constante. Si se suprime la fuerza exterior:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0)e^{-t\tau}$$

donde $\vec{v}(0)$ es la velocidad de deriva inicial en el régimen fuera del equilibrio. En este modelo la expresión precedente describe el acercamiento a un equilibrio con un tiempo característico τ. Se puede notar también que el término $m\vec{v}/\tau$ introducido tiene la forma de una fuerza de fricción donde m/τ juega el rol de un coeficiente de roce. Sin este término, la velocidad aumentaría linealmente en el tiempo, lo que no permitiría alcanzar un régimen estacionario correspondiente a la ley de Ohm. En régimen permanente, se obtiene a partir de (1):

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} = -\mu_e\vec{E}$$

donde μ es la **mobilidad electrónica**, que determina la velocidad que adquieren los electrones como respuesta a un campo eléctrico, sus unidades son [m^2/Vs]. (En física de semiconductores, típicamente se utilizan [cm^2/Vs]). La densidad de corriente $\vec{J}$ debida al arrastre de los electrones es entonces:

$$\vec{J} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = ne\mu\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

donde σ es la **conductividad eléctrica** (su unidad es el Siemens, [S]), cuyo inverso es la resistividad:

$$\rho = \sigma^{-1} \quad \Omega$$

El **camino libre medio** es la distancia media que alcanza a recorrer un electrón entre dos colisiones:

$$L = v\tau = \frac{e\tau^2}{m}\vec{E}$$

En un gas clásico donde la separación entre átomos es típicamente 10 nm, se encuentra experimentalmente un camino libre medio del mismo orden de magnitud, lo que es totalmente esperable. Sin embargo, en un semiconductor el camino libre medio puede ser varios órdenes de magnitud superior a la distancia típica entre 2 átomos, este efecto se debe a la mecánica cuántica.

1.3. Difusión de portadores

En un material inhomogéneo, la concentración n de electrones libres varía con la posición. Supongamos un gradiente de concentración $\frac{\partial n}{\partial x}$ a lo largo de la dirección x. Aparecerá entonces una corriente de difusión electrónica que tiene a uniformizar la densidad de electrones. El número de electrones $n_d(x)$ que atraviesa una superficie unitaria en la dirección x por unidad de tiempo se escribe:

$$n_d(x) = -D\frac{\partial n}{\partial x} \quad \text{Ley de Fick}$$

donde D es el coeficiente de difusión de los electrones. La densidad de corriente electrónica correspondiente es entonces:

$$J(x) = eD\frac{\partial n}{\partial x}$$

Además, existirá un campo eléctrico debido a la distribución inhomogénea de carga, luego la densidad total de corriente $\vec{J}$ será:

$$\vec{J} = ne\mu\vec{E} + eD\vec{\nabla}n$$

Al equilibrio termodinámico, $\vec{J} = 0$, y se crea entonces un campo electrostático tal que:

$$n\mu\vec{E} = -D\vec{\nabla}n$$

Los principios físicos subyacentes a la difusión y a la conductividad son los mismos (colisiones entre partículas y átomos del medio), luego se espera una relación directa entre D y μ, esta es la **relación de Einstein**,:

$$D = \mu\frac{kT}{e}$$

donde k es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura del material.

2. Propagación de ondas electromagnéticas en un metal

En un medio de permitividad ϵ y permeabilidad μ, la velocidad de la luz está dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Esta es la velocidad a la que se propaga una onda electromagnética en el medio. Si la frecuencia de esta onda es w, su longitud de onda está dada por:

$$\lambda = v/f = \frac{v}{2\pi w}$$

En general, el campo eléctrico será una función que varía en el tiempo y en el espacio, por lo que a priori la ley de Ohm no es aplicable directamente. Sin embargo, si éste varía lentamente (longitud de onda mayor que el camino libre medio, $\lambda > L$), podemos suponer que la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico sigue siendo la ley de Ohm en cada punto:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \sigma\vec{E}(\vec{x}, t)$$

Ahora bien, las ecuaciones de Maxwell en un medio con conductividad σ toman la siguiente forma:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x},t) \quad \text{Gauss-Poisson}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} \quad \text{Faraday}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{0} \quad \text{Gauss}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x},t) = \mu\sigma\vec{E}(\vec{x},t) + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} \quad \text{Ampère-Maxwell}$$

Utilizando la siguiente idendidad vectorial : $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$, se tiene:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}^2\vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times B = -\vec{\nabla}^2\vec{E}$$

$$\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2\vec{E}$$

Supongamos ahora que el campo oscila a una frecuencia w, y que se propaga en la dirección z, así separamos su parte espacial y temporal de la siguiente manera: $\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{-kz}e^{-iwt}$, donde k es una constante de propagación por determinar. Insertando esta solución en la ecuación escrita previamente:

$$k^2 = \left(w^2\epsilon\mu + iw\mu\sigma\right)$$

Si el material es muy buen conductor, $w\mu\sigma >> w^2\epsilon\mu$ (o equivalentemente $\sigma >> w\epsilon$), entonces:

$$k = \sqrt{iw\mu\sigma} = e^{i\pi/4}\sqrt{w\ mu\sigma} = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}}(1+i)$$

Definimos la longitud de penetración δ como:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{w\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}}$$

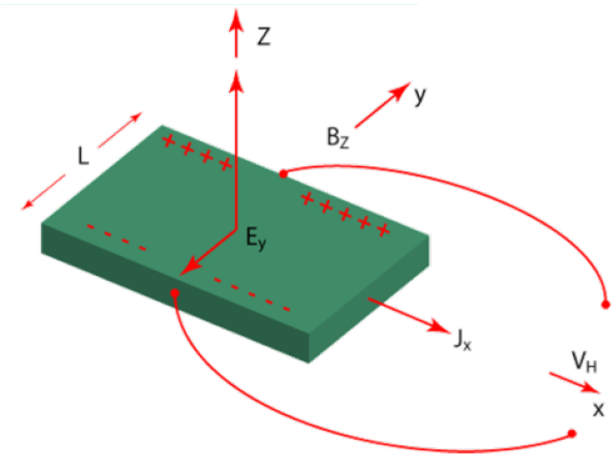
entonces $k = \frac{1}{\delta}(1+i)$ y la solución para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{-z/\delta}e^{-i(wt-z/\delta)}$$

Se ve entonces que la magnitud del campo eléctrico decae de forma exponencial al interior del conductor. Al penetrar una distancia δ, la magnitud del campo eléctrico se reduce a un 36 % (y por lo tanto la potencia de la onda se ha reducido a un 12 % de su valor inicial), de ahí surge el nombre para δ.

3. Efecto Hall

El efecto Hall (descubierto en 1879) consiste en la aparición de un campo eléctrico transversal en un material cuando éste transporta una corriente y es colocado en un campo magnético perpendicular a ella. La situación se muestra en la figura siguiente:



Un campo magnético es aplicado en la dirección z, perpendicular a la densidad de corriente $\vec{J} = J_x\hat{x}$. Este campo modifica la trayectoria de las cargas, acumulándolas en un costado del material, provocando entonces un campo eléctrico en la dirección y. Un portador de carga se mueve con una velocidad de deriva $\vec{v} = v_x\hat{x}$, en el equilibrio la fuerza de Lorentz que actua sobre él es nula:

$$\vec{F} = qE_y\hat{y} + qv_x\hat{x} \times B_z\hat{z} = \vec{0}$$

Luego:

$$E_y = v_x B_z$$

El potencial que se crea a lo largo de L está dado por (el signo es consistente con la figura):

$$V_H = -E_y L$$

La medición de este potencial permite entonces conocer E_y, y luego B_z. Considerando que la densidad de corriente es:

$$J_x = nqv_x$$

Entonces:

$$R_H = \frac{E_y}{J_x B_z} = \frac{1}{nq}$$

donde hemos definido R_H, el coeficiente de Hall. La medición de éste permite determinar el signo de los portadores de carga. (En un semiconductor, los portadores mayoritarios pueden tener carga positiva, como se verá más adelante).

4. Cristalografía

El sistema cúbico de cristales es un sistema cristalino donde celda unitaria tiene forma de cubo. Ésta se repite indefinidamente a lo largo de todo el material. En general, hay 3 variedades de cristales: Cúbico Simple (SC), Cúbico de cuerpo centrado (BCC) y cúbico de caras centrado (FCC). En el caso SC cada vértice del cubo posee un átomo, es decir en la celda unitaria hay ocho octavos de átomo, es decir 1 átomo por cubo.

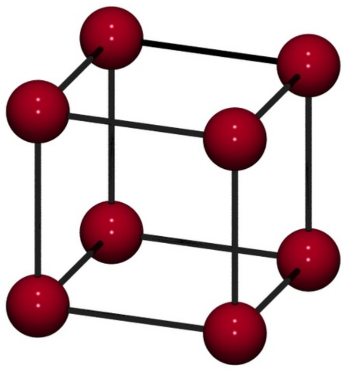


Figura 2: Sistema cúbico simple

En el caso BCC se puede encontrar átomos en los vértices y uno en el centro, es decir por celda unitaria hay 2 átomos:

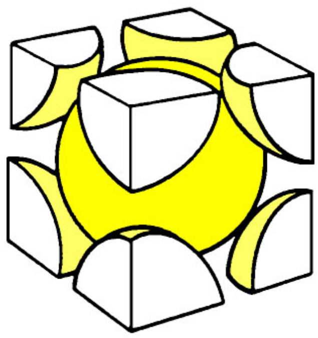


Figura 3: Malla elemental del arreglo BCC

Por último, el caso FCC (Ar, Ag, Al, Au, Co, Cu) tiene átomos en cada vértice y en los centros de las caras, dando un total de 4 átomos por celda (ocho octavos de los vértices y 6 medios por las caras).

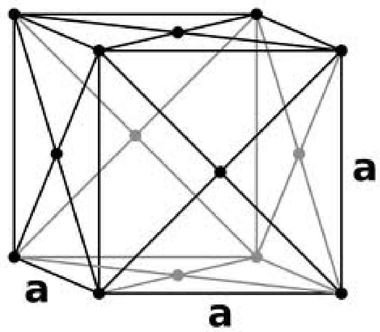


Figura 4: Estructura cristalina de cara centrada (FCC)

5. Constantes y propiedades

Resistividad en ohm-metros, medidos a 1 atm y a 20º C:

Material	Resistividad	Material	Resistividad
Conductor		*Semi-Conductores*	
Plata	$1,59 \times 10^{-8}$	Agua Salada	$4,4 \times 10^{-2}$
Cobre	$1,68 \times 10^{-8}$	Germanio	$4,6 \times 10^{-1}$
Oro	$2,21 \times 10^{-8}$	Diamante	2,7
Aluminio	$2,65 \times 10^{-8}$	Silicio	$2,5 \times 10^{3}$
Hierro	$9,61 \times 10^{-8}$	*Aislantes*	
Mercurio	$9,58 \times 10^{-7}$	Agua pura	$2,5 \times 10^{5}$
Nicromo	$1,00 \times 10^{-6}$	Madera	$10^{8} - 10^{11}$
Manganeso	$1,44 \times 10^{-6}$	Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$
Grafito	$1,4 \times 10^{-5}$	Cuarzo	$\sim 10^{16}$

Susceptibilidades magnéticas a 1 atm y 20ºC:

Material	Susceptibilidad	Material	Susceptibilidad
Diamagnetico		*Paramagnetico*	
Bismuto	$-1,6 \times 10^{-4}$	Oxígeno	$1,9 \times 10^{-6}$
Oro	$-3,4 \times 10^{-5}$	Sodio	$8,5 \times 10^{-6}$
Plata	$-2,4 \times 10^{-5}$	Aluminio	$2,1 \times 10^{-5}$
Cobre	$-9,7 \times 10^{-6}$	Tungsteno	$7,8 \times 10^{-5}$
Agua	$-9,0 \times 10^{-6}$	Platinio	$2,8 \times 10^{-4}$
CO_2	$-1,2 \times 10^{-8}$	Oxígeno líquido (-200 ºC)	$3,9 \times 10^{-3}$
Hidrógeno	$-2,2 \times 10^{-9}$	Gadolinio	$4,8 \times 10^{-1}$

Constantes dieléctricas, a 1 atm y 20 ºC:

Material	Constante Dieléctrica	Material	Constante Dieléctrica
Vacío	1	Benceno	2,28
Helio	1,000065	Diamante	5,7
Neon	1,00013	Sal	5,9
Hidrógeno	1,00025	Silicio	11,8
Argón	1,00052	Metanol	33
Aire(seco)	1,00054	Agua	80,1
Nitrógeno	1,00055	Hielo(30ºC)	99
Vapor de agua (100ºC)	1,00587	$KTaNbO_3$	34 000

Algunas unidades y constantes fundamentales:

Unidades	
Ångstrom	$1\mathring{A} = 10^{-10}m$ ($\sim$ tamaño de un átomo)
Fermi	$1fm = 10^{-15}m$ ($\sim$ tamaño de un núcleo)
ElectronVolt	$1eV = 1,60218\,10^{-19}J$
Constantes Fundamentales	
Constante de Planck	$h = 6,6261\,10^{-34}Js$
Cte. Planck h-barra	$\hbar = h/2\pi = 1,054\,10^{-34}Js$
Velocidad de la luz	$c = 299\,792\,458\,m/s$
Permeabilidad del vacío	$\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}$ y $\epsilon_0\mu_o c^2 = 1$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38\,10^{-23}JK^{-1}$
Número de Avogadro	$N_A = 6,0221\,10^{23}$
Carga del electrón	$q_e = -1,602\,10^{-19}C$
Masa del electrón	$m_e = 9,1094\,10^{-31}kg$
Masa del protón	$m_p = 1,672\,10^{-27}kg$

5.0.1. Problema 1

1. Demuestre que la longitud de penetración de un conductor «pobre» ($\sigma \ll \omega\epsilon$) es $(2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$ (independiente de la frecuencia). Encuentre la longitud de penetración en el agua pura.

2. Demuestre que la longitud de penetración de un buen conductor ($\omega\epsilon \ll \sigma$) es $\lambda/2\pi$ con λ la longitud de onda en el conductor. Encuentre la penetración en un metal típico ($\sigma \simeq 10^7(\Omega m)^{-1}$) en el rango visible $\omega \simeq 10^{15}/s$. Asuma $\epsilon \simeq \epsilon_0$ y $\mu \simeq \mu_0$. ¿Por qué los metales son opacos?

3. La plata es un muy buen conductor, pero es caro. Suponga que está diseñando un experimento de microondas que opera a frecuencias en torno a los 10^{10} Hz. Estime cuán espesas deben las capas protectoras de plata para proteger otros aparatos de posibles interferencias.

4. Encuentre la longitud de onda y la velocidad de propagación en el cobre de ondas de 1 MHz. Compare con los valores correspondientes en el aire y el vacío.

5.0.2. Solución Problema 1

- En clases se vio que:

  $$k^2 = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\sigma$$

  En un conductor «pobre» se tiene que: $\sigma \ll \omega\epsilon$. Además para encontrar la longitud de penetración se usó la parte imaginaria de k: $\delta = \frac{1}{\Im(k)}$. Luego nos interesa encontrar:

  $$\Im(k) = \Im((\omega^2\epsilon\mu(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}))^{1/2})$$

  $$\Im(k) = \Im(\omega\sqrt{\epsilon\mu}(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon})^{\frac{1}{2}})$$

  $$\Im(k) = \Im(\omega\sqrt{\epsilon\mu}(1 + i\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + O((\frac{\sigma}{\omega\epsilon})^2)))$$

  $$\Im(k) \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

  Luego: $\delta = \frac{1}{\Im(k)} \simeq \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$

  Para agua pura se tendrá: $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0 = 80,1\epsilon_0$, $\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = \mu_0(1 + 9,0 \times 10^{-6}) \simeq \mu_0$ y $\sigma = \frac{1}{2,5\times 10^5}$. Con estos valores se obtiene:

  $$\delta = 2 \times 2,5 \times 10^5 \times \sqrt{\frac{80,1 \times 8,85 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} = 1,19 \times 10^4 m$$

- $$k^2 = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\sigma$$

  $$k^2 = \omega^2\mu\sigma(i + \frac{\epsilon\omega}{\sigma})$$

  Luego, al primer orden:

  $$k^2 \simeq i\omega\mu\sigma$$

  De esta manera se tendrá:

  $$\Im(k) = \Im\left((i\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Im(k) = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \Re(k)$$

Y se tiene además:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Re(k)} \simeq \frac{2\pi}{\Im(k)} = 2\pi\delta$$

Con estos datos se tendrá:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{10^{15} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10^{7}}} = 13nm$$

En consecuencia, el campo no penetra mucho en el metal, lo que explica su opacidad frente a la luz visible.

- Para la plata $\rho = 1{,}59 \cdot 10^{-8}\Omega m$. Como buscamos solo un orden de magnitud podemos usar $\epsilon \simeq \epsilon_0$, Luego $\omega\epsilon = 2\pi 10^{10} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 0{,}56$ Como $\sigma = 1/\rho = 6,25 \cdot 10^{7} \gg \omega\epsilon$. La longitud de penetración es:

$$\delta \simeq \frac{1}{\kappa}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 10^{10} \times 6,25 \times 10^{7} \times 4\pi \times 10^{-7}}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

$$\delta = 6,4 \times 10^{-7}m = 6,4 \times 10^{-4}mm$$

Es decir una capa de 0,001 mm bastaría

- Para el cobre se tendrá que $\sigma = \frac{1}{1{,}68\times 10^{-8}} = 6 \times 10^{7}$. Luego $\omega\epsilon_0 = (2\pi \times 10^{6}) \times (8,85 \times 10^{-12}) = 6 \times 10^{-5}$. Como $\sigma \gg \omega\epsilon$ se tendrá : $k \simeq \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$. Entonces λ será:

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{2\pi \times 10^{6} \times 6 \times 10^{7} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 4 \times 10^{-4}m = 0,4mm$$

La velocidad de propagación será igual a: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi}\lambda = \lambda\nu = 400m/s$. En cambio, en el vacío será: $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\times 10^{8}}{10^{6}} = 300m$ y se tendrá además: $v = c = 3 \times 10^{8}$. En realidad, en un buen conductor la longitud de penetración es tan pequeña comparada con la longitud de onda que ésta última pierde sentido así como la velocidad de propagación.

5.0.3. Problema 2

El sodio es un metal monovalente (BCC) con una densidad de $0,9712\ g/cm^{3}$. Su masa atómica es $22,99g/mol$. La movilidad de deriva de los electrones del sodio es 53 $cm^{2}V^{-1}s^{-1}$

1. Considere el conjunto de los electrones de conducción en el sólido. Si cada átomo de Na aporta un electrón al océano de electrones, estime la separación media entre los electrones.

2. ¿Cuál es la separación media entre un electrón y un ión de metal (Na^{+})?. Asuma que la mayor parte del tiempo el electrón prefiere estar entre dos iones vecinos. ¿Cuál es la energía de interacción aproximada entre un electrón y un ión?

3. ¿Cuál es la relación entre la energía de interacción electrón/ión-Na y la energía térmica promedio por partícula, de acuerdo a la teoría cinética molecular de la materia? ¿Espera que esta teoría sea aplicable a la conducción de electrones en Na? Si la energía de interacción media electrón/ión es del mismo orden de magnitud que la energía cinética media de los electrones, ¿Cuál es la velocidad media de los electrones en el Na? ¿Por qué la energía cinética media sería comparable a la energía media de interacción electrón/ion?

4. Calcule la conductividad eléctrica del Na y compárela con su valor experimental de $2,1 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$. Comente según la diferencia encontrada.

5.0.4. Solución Problema 2

1. Comenzamos por calcular la densidad atómica (D será la densidad másica, M_{at} la masa atómica y N_a el número de Avogadro):

$$\begin{aligned} n_{at} &= \frac{DN_a}{M_{at}} \\ &= \frac{0,9712 g/cm^3 \times 6,022 \times 10^{23} mol^{-1}}{22,99 g/mol} \\ &= 2,544 \times 10^{28} m^{-3} \end{aligned}$$

   Este último valor es equivalente a la densidad de electrones ya que cada átomo de Na contribuye con un electrón de conducción. Si d es la distancia de separación media, se tendrá que aproximadamente:

$$\begin{aligned} d &\simeq \frac{1}{n_{at}^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{(2,544 \times 10^{28} m^{-3})^{\frac{1}{3}}} \\ &= 3,40 \times 10^{-10} m \\ &= 0,34 nm \end{aligned}$$

2. El Na es BCC con 2 átomos por celda unitaria (o más bien, 1 átomo y 8 octavos de átomo, uno por vértice). Si a es la longitud de la arista de la celda cúbica unitaria, la densidad será:

$$\begin{aligned} D &= \frac{N^o\, de\, atomos\, en\, la\, celda \times masa\, de\, 1\, atomo}{Volumen\, de\, la\, celda} \\ &= \frac{2\frac{M_{at}}{N_a}}{a^3} \end{aligned}$$

   Luego a:

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{2M_{at}}{DN_a}\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= 4,284 \times 10^{-10} \\ &= 0,4284 nm \end{aligned}$$

   Para la estructura BCC (ver figura), el radio R del ión metálico está relacionado con el parámetro a según: $4r = a\sqrt{3}$. Luego:

$$\begin{aligned} R &= \frac{a\sqrt{3}}{4} &= 1,855 \times 10^{-10} m \\ &= 0,1855 nm \end{aligned}$$

Si el electrón está entre los dos iones metálicos, en promedio estára a una distancia R. Si $d_{electron-ion} \simeq R$, la energía potencial entre un electrón de conducción y **UN** ion metálico Na será:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{(-e)(e)}{4\pi\epsilon_0 R} \\
U &= -1,24 \times 10^{-18} \\
&= -7,76eV
\end{aligned}
$$

3. La energía de interacción ion-electrón es mucho más grande que la energía térmica promedio del conjunto de «partículas libres», es decir: $E_{promedio} = K_{promedio} = \frac{3kT}{2} \simeq 0,039eV$ a 300 K. En el caso del Na, la energía de interacción es importante, por lo que no se puede suponer que los electrones están moviéndose libremente como partículas de un gas en un cilindro. Si asumiéramos que la energía cinética media es del mismo orden de magnitud que la energía media de interacción se tendrá:

$$
\begin{aligned}
K_{promedio} &= \frac{1}{2} m_e u^2 \\
&\simeq \mid U \mid \\
&= -1,24 \times 10^{-18} J
\end{aligned}
$$

Así tendrémos que u será:

$$
\begin{aligned}
u &\approx (\frac{2U}{m_e})^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2(1,24 \times 10^{-18} J)}{9,109 \times 10^{-31} kg} \right)^{\frac{1}{2}} \\
u &= 1,65 \times 10^6 m/s
\end{aligned}
$$

En mecánica existe el llamado *teorema del virial* que establece una relación entre el promedio de la energía cinética y el de la potencial. Si el potencial es de la forma: $V(r) = ar^n$ se tendrá entonces la siguiente relación:

$$2\langle K \rangle = n \langle U \rangle$$

En nuestro caso (n=-1):

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

Lo que justifica que ambas energías tengan un orden de magnitud parecido. En cambio, en el caso erróneo, donde utilizamos la teoría cinética de gases obtendríamos la siguiente relación:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} m_e u^2 &= \frac{3}{2} kT \\
u &= 1,1 \times 10^5 m/s
\end{aligned}
$$

Una velocidad considerablemente menor. Es más, la teoría cinética predice un aumento de u según $\sqrt{T}$, en cambio el análisis precedente muestra una velocidad independiente de la temperatura. La relación lineal entre la resistividad ρ y T para la mayoría de los metales sólo puede explicarse si u= constante.

4. Si μ es la movilidad de deriva de conducción de los electrones y n es su concentración, entonces la conductividad eléctrica del Na será $\sigma = en\mu$. Asumiendo que cada átomo de Na aporta con un electrón ($n = n_{at}$) se tendrá:

$$\begin{aligned}\sigma &= en\mu \\ &= (1,602 \times 10^{-19}C)(2,544 \times 10^{28})(53 \times 10^{-4}m^2V^{-1}s^{-1}) \\ \sigma &= 2,16 \times 10^7\Omega^{-1}m^{-1}\end{aligned}$$

Que se asemeja al valor experimental.

5.0.5. Problema 3

1. Cuál es la profundidad de penetración de un cable de cobre que transporta corriente a 60 Hz? La resistividad del cobre a 27 grados es 17 $n\Omega m$. Su permeabilidad relativa es $\mu_r = 1$. Tiene algún sentido utilizar un conductor para una línea de transmisión de potencia con un diámetro de más de 2 cm?

2. ¿Cuál es la profundidad de penetracióm de un cable de hierro que transporta una corriente de 60 Hz? La resistividad del hierro a 27 grados es 97 $n\Omega m$. Asuma que la permeabilidad relativa es $\mu_r = 700$. Cómo se compara esto con el cable de cobre?. Discuta por qué el cobre es preferido por sobre el hierro para transmitir potencia, incluso cuando el cobre es aproximadamente 100 veces más caro.

5.0.6. Solución Problema 3

1. La conductividad es $1/\rho$. La permeabilidad relativa (μ_r) para el cobre es 1, luego $\mu_{Cu} = \mu_0$. La frecuencia angular es $w = 2\pi f = 2\pi \times 60$ Hz. Usando esto valores se obtiene:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}w_0\frac{1}{\rho}\mu_{Cu}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(2\pi 60\ \text{ s}^{-1})\frac{4\pi\times10^{-7}\ Hm^{-1}}{17\times10^{-9}\ \Omega m}}}$$

$$\delta = 0{,}00847\ \ nm = 8{,}47\ \ mm$$

Esta es la profundidad del flujo de corriente. Si el radio del cable es de 10 mm o más, no fluye corriente a través del nucleo y se pierde. No tiene sentido utilizar cobre mucho más delgado que un cable de 10 mm (diámetro de 20 mm).

2. La conductividad es $1/\rho$. La permeabilidad relativa es $\mu_r = 700$, luego $\mu_{Fe} = 700\mu_0$. La frecuencia angular es $w = 2\pi f = 2\pi(60)$ Hz. Usando estos valores:

$$\delta_{Fe} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}w_0\frac{1}{\rho}\mu_{Cu}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(2\pi 60\ \text{ s}^{-1})\frac{700\times4\pi\times10^{-7}\ Hm^{-1}}{17\times10^{-9}\ \Omega m}}}$$

$$\delta = 0{,}000765\ m = 0{,}765\ mm$$

La profundidad de penetración es cerca de 11 veces menor que en el cobre. Para calcular la resistencia necesitamos el área efectiva de conducción. Si bien el área transversal del cable es πr^2, (con r el radio del cobre), la corriente fluye en un anillo de ancho δ. El área por donde fluye la corriente será:

$$A_{Fc} = \pi r^2 - \pi(r-\delta)^2$$

Con esto, la resistencia por unidad de longitud de un cable de hierro es:

$$R_{Fe} = \frac{\rho_{Fc}}{A_{Fc}} = \frac{\rho_{Fe}}{\pi r_{Fe}^2 - \pi(r_{Fe}-\delta)^2} = \frac{\rho_{F_e}}{2\pi r_{Fe}\delta_{Fe} - \pi\delta_{Fe}^2}$$

Y para el cobre:

$$R_{Cu} = \frac{\rho_{Cu}}{2\pi r_{Cu}\delta_{Cu} - \pi\delta_{Cu}^2}$$

Para que estas dos resistencias sean idénticas:

$$R_{Fe} = R_{Cu}$$

$$\frac{\rho_{Fe}}{2\pi r_{Fe}\delta_{Fe} - \pi\delta_{Fe}^2} = \frac{\rho_{Cu}}{2\pi r_{Cu}\delta_{Cu} - \pi\delta_{Cu}^2}$$

Despreciando δ_{Fe}^2:

$$2\pi\rho_{Cu} r_{Fe}\delta_{Fe} = \rho_{Fe}\left(2\pi r_{Cu}\delta_{Cu} - \pi\delta_{Cu}^2\right)$$

Finalmente:

$$r_{Fe} = \frac{\rho_{Fe}\left(2\pi r_{Cu}\delta_{Cu} - \pi\delta_{Cu}^2\right)}{2\pi\rho_{Cu}\delta_{Fe}}$$

Si asumimos un valor de $r_{Cu} = 10 \;\; mm$, obtenemos :

$$r_{Fe} = \frac{(97\times10^{-9}\ \Omega m)\left[2\pi(0{,}010\ m)(0{,}00847\ m) - \pi(0{,}00847\ m)^2\right]}{2\pi\left(17\times10^{-9}\ \Omega m\right)(0{,}000765\ m)}$$

$$r_{Fe} = 0{,}364\ m$$

Ahora comparamos el volumen (V) de Fe por unidad de largo con el volumen de Cu por unidad de largo:

$$\frac{V_{Fe}}{V_{Cu}} = \frac{\pi r_{Fe}^2}{r_{Cu}^2} = \frac{(0{,}364\ m)^2}{(0{,}010\ m)^2} = 1325$$

De forma que incluso cuando el Fe cuesta 100 veces menos que el cobre, necesitamos aproximadamente 1300 veces el volumen de Cu si utilizamos Fe. Esto se traduce en un costo 13 veces mayor, además se obtiene un cable más pesado.

5.0.7. Problema 4

La movilidad de deriva del indio ha sido medida en $6cm^2V^{-1}s^{-1}$. La temperatura en 27 ºC y la resistividad del Indio en $8,37 \times 10^{-8}$ y su masa atómica y densidad son 114 g/mol y $7,31gcm^{-3}$

1. Basándose en el valor de la resistividad, determine cuántos electrones libres aporta cada átomo de In. Cómo se compara esto con la posición del In en la tabla periódica (grupo IIIB)
2. Si la velocidad media de conducción de los electrones en el In es $1,74 \times 10^8 cms^{-1}$, ¿cuánto vale el camino libre medio?

5.0.8. Solución Problema 4

1. A partir de $\sigma = en\mu_d$ podemos calcular la concentración de electrones de conducción n:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sigma}{e\mu_d} \\ &= \frac{(8,37 \times 10^{-8}\Omega m)^{-1}}{(1,602 \times 10^{-19}C)(6 \times 10^{-4}m^2V^{-1}s^{-1})} \\ n &= 1,243 \times 10^{29}m^{-3} \end{aligned}$$

La concentración atómica será:

$$\begin{aligned} n_{at} &= \frac{dN_a}{M_{at}} \\ n_{at} &= \frac{(7,31 \times 10^3 kgm^{-3})(6,022 \times 10^23 mol^{-1})}{114,82 \times 10^{-3} kg\, mol^{-1}} \\ n_{at} &= 3,834 \times 10^28 m^{-3} \end{aligned}$$

EL número efectivo de electrones de conducción que aporta cada átomo de In n_{eff} es:

$$n_{eff} = \frac{n}{n_{at}} = \frac{1,243 \times 10^{29}m^{-3}}{3,834 \times 10^{28}m^{-3}}$$

$$n_{eff} = 3,24$$

En conclusión alrededor de 3 electrones aporta cada átomo al mar de electrones. Esto está en buen acuerdo con la posición del In en la tabla periódica grupo III, cuya valencia es 3.

2. Si el tiempo promedio entre choques es τ entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\mu_d m_e}{e} \\ &= \frac{(6 \times 10^{-4}m^2V^{-1}s^{-1})(9,109 \times 10^{-31}kg)}{1,602 \times 10^{-19}C} \\ &= 3,412 \times 10^{-15}s \end{aligned}$$

Tomando como velocidad media $u = 1,74 \times 10^6 ms^{-1}$, el camino libre medio será:

$$\begin{aligned} L &= u\tau \\ &= (1,74 \times 10^6 ms^{-1})(3,412 \times 10^{-15}s) \\ &= 5,94 \times 10^{-9}m \\ &= 5,94nm \end{aligned}$$

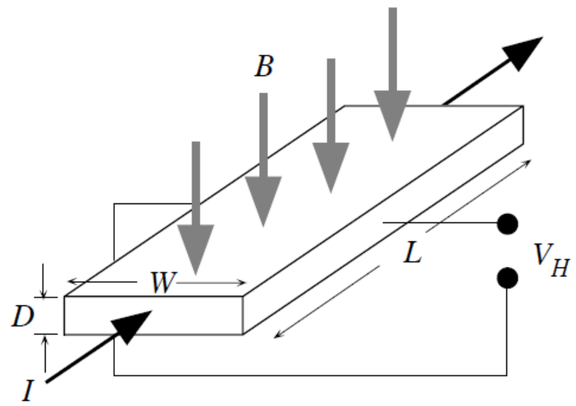
5.0.9. Problema 5

Considere una muestra rectangular, un metal de largo L, ancho W y espesor D. Una corriente I pasa a lo largo de L, perpendicular al área transversal WD. La carga $W \times L$ está expuesta a un campo magnético B. Un vóltmetro se conecta a través del ancho, como se muestra en la figura, para leer el voltaje de Hall V_H.

1. Muestre que el voltaje de Hall que se obtiene en el voltímetro es

$$V_H = \frac{IB}{Den}$$

2. Considere una barra de 1 micrón de espesor de una capa de oro en un substrato aislante que es candidato para un sensor Hall. Si la corriente a través de la película es constante e igual a 100 mA, cuál es el campo magnético que se puede medir por cada μV de voltaje Hall?



5.0.10. Solución Problema 5

1. El coeficiente Hall R_H, se relaciona con la concentración de electrones n, a través de $R_H = -1/(en)$, y se define como:

$$R_H = \frac{E_y}{JB}$$

donde E_y es el campo eléctrico en la dirección y, J es la densidad de corriente y B es el campo magnético. Igualando estas dos ecuaciones:

$$-\frac{1}{en} = \frac{E_y}{JB}$$

$$E_y = -\frac{JB}{en}$$

la densidad de corriente perpendicular al plano $W \times D$ es:

$$J = \frac{I}{WD}$$

Aislando para W:

$$W = \frac{I}{JD}$$

El voltaje de Hall (V_H) a través de W es:

$$V_H = -WE_y$$

Substituyendo:

$$V_H = \frac{IB}{Den}$$

2. El espesor de la película es $D = 1$ micrón, y la corriente a través de la película es $I = 100\ mA = 0{,}1\ A$. Tomamos un voltaje de Hall es $V_H = 1\ \mu V$. Necesitamos la concentración de electrones del oro, se tiene

$$M_{at} = 196{,}97\ g/mol$$
$$d = 19{,}3\ g/cm^3 = 19300\ kg/m^3$$

Ya que el oro tiene 1 electrón de valencia, la concentración de electrones es:

$$n = \frac{dN_A}{M_{at}} = \frac{(19300\ kmm^{-3})(6{,}022 \times 10^{23}\ mol^{-1})}{(196{,}97 \times 10^{-3}\ kg\ mol^{-1}} = 5{,}901 \times 10^{28}\ m^{-3}$$

Ahora el campo magnético B será:

$$V_H = \frac{IB}{Den}$$

$$B = \frac{V_H Den}{I} = \frac{(1 \times 10^{-6}\ V)(1 \times 10^{-6}\ m)(1{,}602 \times 10^{-19}\ C)(5{,}901 \times 10^{28}\ m)}{(0{,}1\ A)}$$

$$B = 0{,}0945\ T$$